Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
03.07.2010

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, falls die drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{rang}[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = 3$ ist. Letzteres ist erfüllt, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det[\vec{w}_1, \vec{w}_2] = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0\,,$$

so dass $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind. Aufgrund von $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ bildet $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

b) Da $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2\,.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 3Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Folglich ist $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3$, d.h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2$.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2$$

für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ führt auf das lineare Gleichungssystem mit der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 3Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Also gilt $\mu_1 = 2, \mu_2 = -1$, so dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2$ ist.

c) Da A die Darstellungsmatrix von $\vec{f}$ bezüglich der Standardbasen ist, lassen sich die Koordinaten von $\vec{f}(\vec{v}_2)$ bezüglich der Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ wie folgt berechnen

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von **b)** ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 6\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 = 6(-5\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2) + 5(2\vec{w}_1 - \vec{w}_2) = -20\vec{w}_1 + 13\vec{w}_2\,.$$

Deshalb lautet die zweite Spalte der Darstellungsmatrix von $\vec{f}$ bezüglich der Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ im Urbild $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ im Bild $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} -20 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

d) Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\dim \operatorname{Bild} \vec{f} + \dim \operatorname{Kern} \vec{f} = 3\,.$$

Wegen $\operatorname{Bild} \vec{f} \subset \mathbb{R}^2$ ergibt sich $\dim \operatorname{Bild} \vec{f} \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2$, woraus $\dim \operatorname{Kern} \vec{f} \geqslant 1$ folgt. Deshalb ist $\operatorname{Kern} \vec{f} \neq \{\vec{0}\}$ und $\vec{f}$ nicht injektiv.

Aufgabe 2

a) $\vec{x}$ ist genau dann ein Eigenvektor von $A_{\alpha,\beta}$, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $A_{\alpha,\beta}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. In der vorliegenden Situation bedeutet dies

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \beta+1 & -\alpha & \beta-1 \\ 5 & 7 & \alpha \\ -\alpha & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccll} 2(\beta+1) - \alpha + \beta - 1 & = & 12\lambda & (i) \\ 10 + 7 + \alpha & = & 6\lambda & (ii) \\ -2\alpha - 5 + 7 & = & 6\lambda & (iii) \end{array} \right.$$

Gleichsetzen von (ii) und (iii) ergibt

$$17 + \alpha = -2\alpha + 2 \quad \iff \quad \alpha = -5\,.$$

Hiermit folgt aus (ii)

$$17 - 5 = 6\lambda \quad \iff \quad \lambda = 2\,.$$

Schließlich liefert (i)

$$3\beta + 6 = 24 \quad \iff \quad \beta = 6\,.$$

Fazit: Nur im Fall $(\alpha, \beta) = (-5, 6)$ ist $\vec{x} = (2, 1, 1)$ Eigenvektor von $A_{\alpha,\beta}$. Der zugehörige Eigenwert lautet 2.

b) Für das charakteristische Polynom von $A := A_{-5,6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & -5 \\ 5 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = \det\begin{pmatrix} 7/6-\lambda & 5/6 & 5/6 \\ 5/6 & 7/6-\lambda & -5/6 \\ 5/6 & -5/6 & 7/6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6^3}\det\begin{pmatrix} 7-6\lambda & 5 & 5 \\ 5 & 7-6\lambda & -5 \\ 5 & -5 & 7-6\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{Z_2\to Z_2+Z_1\\ Z_3\to Z_3+Z_1}}{=} \frac{1}{6^3}\det\begin{pmatrix} 7-6\lambda & 5 & 5 \\ 12-6\lambda & 12-6\lambda & 0 \\ 12-6\lambda & 0 & 12-6\lambda \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6^3}(12-6\lambda)^2\det\begin{pmatrix} 7-6\lambda & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z_1\to Z_1-5Z_2-5Z_3}{=} \frac{1}{6^3}(12-6\lambda)^2\det\begin{pmatrix} -3-6\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6^3}(12-6\lambda)^2(-3-6\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also 2 und $-1/2$.

Aufgabe 3

$$\vec{F}(x,y,z,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 - y\cos(uv) + z^2 \\ x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2-2 \\ xy - \sin(u)\cos(v) + z \end{pmatrix}$$

(1) Es gilt $\vec{F}(1,1,0,\frac{\pi}{2},0) = \vec{0}$ und $\vec{F}$ ist im $\mathbb{R}^5$ stetig diff'bar.

$A := [D_1\vec{F}(\vec{p}_0), D_2\vec{F}(\vec{p}_0), D_3\vec{F}(\vec{p}_0)]$ mit $\vec{p}_0 = (1,1,0,\frac{\pi}{2},0)$

$$= \begin{pmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{pmatrix}_{(1,1,0,\frac{\pi}{2},0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 6$: (2) A ist regulär

(1), (2) sind die Vor in Satz 2, Kap 33: Die Vor dafür, dass $\vec{F}(x,y,z,u,v) = \vec{0}$ in einer Umgebung von $(1,1,0,\frac{\pi}{2},0)$ eine Auflösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{H}(u,v) \left(= \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \\ h(u,v) \end{pmatrix}\right)$ besitzt.

(*) gesucht ist die 1. Zeile der Matrix

$$\vec{H}'(\tfrac{\pi}{2},0) = -A^{-1}[D_4\vec{F}(\vec{p}_0), D_5\vec{F}(\vec{p}_0)]$$

Man berechnet (leicht) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

<u>noch Aufgabe 3</u> und

$$[D_4\vec{F}(\vec{p}_0), D_5\vec{F}(\vec{p}_0)] = \left.\begin{pmatrix} y v \sin(uv) & y u \sin(uv) \\ -v\cos(uv) & -u\cos(uv) \\ -\cos u \cos v & \sin u \sin v \end{pmatrix}\right|_{\substack{y=1\\ u=\frac{\pi}{2}\\ v=0}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1. Zeile von $\vec{H}'(\frac{\pi}{2},0)$: $\underline{D_1 f(\frac{\pi}{2},0)=0,\ D_2 f(\frac{\pi}{2},0)=\frac{\pi}{12}}$

Alternativ ab (*):

Bilde $\vec{F}(f(u,v), g(u,v), h(u,v), u, v) = \vec{0}$.

Differenziere nach u und v.

Setze $u=\frac{\pi}{2}$, $v=0$ ein und verwende

$f(\frac{\pi}{2},0)=1$, $g(\frac{\pi}{2},0)=1$, $h(\frac{\pi}{2},0)=0$

Eliminiere $D_1 f(\frac{\pi}{2},0)$, $D_2 f(\frac{\pi}{2},0)$.

Ü Klausur HM II   SS 2010   Lösungen

Aufgabe 4

a) Mit Zylinderkoordinaten r, φ, z lässt sich schreiben:

$$(x,y,z) \in G_1 \iff \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} z \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$$

und $0 \le z \le 1$

Mit $d(x,y,z) = r\, d(r,\varphi,z)$ erhält man:

$$\iiint_{G_1} \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z) = \int_{z=0}^{1} \int_{r=z}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \, d\varphi\, dr\, dz$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^{1} \frac{1}{3}(1-z^3)\, dz = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

b) Wieder mit Zylinderkoordinaten hat man

$$(x,y,z) \in G_2 \iff \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{z} \\ 0 \le z \le 1 \end{array}$$

Es folgt: Volumen von $G_2 = \int_{z=0}^{1} \int_{r=0}^{\sqrt{z}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \, d\varphi\, dr\, dz$

$$= 2\pi \int_{z=0}^{1} \frac{1}{2} z\, dz = \underline{\frac{\pi}{2}}$$