Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

SS 2012
07.07.2012

Übungsklausur zur Höheren Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (6+1+3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix P so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (7+3 Punkte)

Es sei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 9\}$$

sowie $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 12xy + 9y.$$

a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extremstellen von f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 9\}$.

b) Begründen Sie, warum $\max\limits_B f$ und $\min\limits_B f$ auf dem Rand von B angenommen werden.

Aufgabe 3 (7+3 Punkte)

Für $\alpha > 0$ sei das Vektorfeld $\vec{v}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{v}_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + y^\alpha) \\ 4xy + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\alpha > 0$ so, dass $\vec{v}_\alpha$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie für diese α ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v}_3 \cdot d\vec{s}$$

wobei γ die Strecke mit Anfangspunkt $(0, 0)$ und Endpunkt $(1, -1)$ durchlaufe.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2x^3y + y^3x - 3 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (1, 1)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die Ableitung der dadurch implizit definierten Funktion im Punkt x_0.

b) Sei $a > 0$. B bezeichne die Menge, die von den beiden (sich durchdringenden) Zylindern

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{und} \qquad x^2 + z^2 = a^2$$

eingeschlossen wird. Geben Sie B an und berechnen Sie das Volumen von B.

Hinweis: Rechnen Sie mit kartesischen Koordinaten.