Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

SS 2012
07.07.2012

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur (HM II für die Fachrichtung Physik)

Aufgabe 1

a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom der Matrix:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \overset{Z_2 \to Z_2 - Z_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 3+\lambda & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_1 \to S_1 + S_2}{=} \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+3)\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda+3)\left[(5-\lambda)(-\lambda-2) - 8\right] = -(\lambda+3)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = -(\lambda+3)^2(\lambda-6)$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ (algebraische Vielfachheit 2) sowie $\lambda_2 = 6$ (algebraische Vielfachheit 1).

Für die Eigenräume gilt: $E_A(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i I),\ i = 1, 2.$

$$E_A(-3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_A(6) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 \to Z_1 + Z_2 \\ Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3}}{=} \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2 \to Z_2 + 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + Z_1}}{=} \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_1 \to -Z_1 \\ Z_2 \to -\frac{1}{9} Z_2}}{=} \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \to Z_1 - Z_2}{=} \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist symmetrisch und somit nach Vorlesung diagonalisierbar. Alternativ können wir an der Dimension der Eigenräume die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte ablesen und stellen fest, dass diese für beide Eigenwerte mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt. Nach Vorlesung folgt hieraus ebenso die Diagonalisierbarkeit.

c) Um eine orthogonale Matrix P mit der gewünschten Eigenschaft zu bestimmen, müssen wir eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren berechnen. Da A symmetrisch ist, sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Wir verwenden das Verfahren von Gram-Schmidt, um eine Orthonormalbasis von $E_A(-3)$ zu bestimmen:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 := v_2 - (b_1|v_2) b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$b_2 := \frac{1}{\|c_2\|} c_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ein normierter Eigenvektor zu $\lambda_2 = 6$ ist

$$b_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine orthogonale Matrix P mit $P^T AP = \operatorname{diag}(-3, -3, 6)$ ist somit gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) Da $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, muss für ein lokales Extremum in $B^\circ := \{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 9\}$ notwendigerweise $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T$ gelten, also

$$6xy - 12y = 0 \qquad \text{und} \qquad 3y^2 + 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $y(6x - 12) = 0$ und somit erfüllt, falls $y = 0$ oder $x = 2$ gilt.

1.Fall: $y = 0$. Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt $3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$. Nur für $x = 1$ ergibt sich ein kritischer Punkt, da $(3, 0)$ nicht in B° liegt.

2. Fall: $x = 2$. Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt $3y^2 - 3 = 0$, was nur für $y = 1$ oder $y = -1$ erfüllt ist. Wir erhalten somit die kritischen Punkte $(2, 1)$ und $(2, -1)$.

Mit Hilfe der Hessematrix überprüfen wir, ob es sich bei den gefundenen kritischen Punkten um lokale Extremstellen handelt:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x - 12 \\ 6x - 12 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{indefinit (Determinante negativ), also Sattelpunkt}$$

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{positiv definit, also besitzt } f \text{ in } (2, 1) \text{ ein lokales Minimum}$$

$$H_f(2, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{negativ definit, also besitzt } f \text{ in } (2, -1) \text{ ein lokales Maximum}$$

b) Angenommen, $\max_B f$ bzw. $\min_B f$ würden in B° angenommen werden. Dann müssen die beiden lokalen Extrema auch die globalen Extremstellen von f sein. Finden wir Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) auf ∂B mit $f(x_0, y_0) > f(2, -1)$ und $f(x_1, y_1) < f(2, 1)$, so folgt dass $\min_B f$ und $\max_B f$ auf dem Rand von B angenommen werden.

Mit $(x_0, y_0) = (0, 3)$ und $(x_1, y_1) = (0, -3)$ gilt: $f(0, 3) = 54 > 2 = f(2, -1)$ sowie $f(0, -3) = -54 < -2 = f(2, 1)$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 3

a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, ist $\vec{v}_\alpha$ nach Vorlesung ein Potentialfeld, falls die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\partial_x(\vec{v}_{\alpha,2}(x, y)) = \partial_y(\vec{v}_{\alpha,1}(x, y)) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen $\partial_x(\vec{v}_{\alpha,2}(x,y)) = 4y$ und $\partial_y(\vec{v}_{\alpha,1}(x,y)) = 2\alpha y^{\alpha-1}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\alpha = 2$ ist.

Wir berechnen nun ein Potential für $\vec{v}_2$, d.h. eine Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla w = \vec{v}_2$ in $\mathbb{R}^2$. Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
& w_x(x,y) = 2(x+y^2) \\
\Rightarrow\ & w(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \tilde{w}(y) \\
\Rightarrow\ & w_y(x,y) = 4xy + \tilde{w}'(y) \stackrel{!}{=} 4xy + 3y^2 \\
\Rightarrow\ & \tilde{w}'(y) = 3y^2 \Rightarrow \tilde{w}(y) = y^3 + c \quad (c \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Ein Potential ist somit gegeben durch $w(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$.

b) Das Vektorfeld $\vec{v}_3$ ist kein Potentialfeld, berechne das Kurvenintegral also direkt.

Die Kurve γ kann durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ parametrisiert werden. Nach Definition des Kurvenintegrals folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}_3 \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}_3(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t-t^3) \\ -4t^2 + 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 2t - 2t^3 + t^2\, dt = \left[t^2 - \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x^3y + y^3x - 3 = 0$. Dann gilt:

- f ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
- $f(1,1) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 + 3y^2x$, und somit $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5 \neq 0$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren offene Umgebungen U von $x_0 = 1$ und V von $y_0 = 1$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ so, dass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt:

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x).$$

Dies bedeutet, dass die Gleichung $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (1,1)$ durch die Funktion g aufgelöst wird. Insbesondere gilt $g(1) = 1$.

Um die gesuchte Ableitung zu berechnen, leiten wir die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in U)$ nach x ab:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = 0 \qquad (x \in U) \\
\Rightarrow\ & g'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, g(1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, g(1))} = -\frac{7}{5}
\end{aligned}
$$

b) Die Menge B ist gegeben durch

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Läuft x zwischen $-a$ und a, so ergibt sich für y und z: $y^2 \leq a^2 - x^2$ sowie $z^2 \leq a^2 - x^2$. Wir erhalten somit die folgenden Intervalle für x, y, z:

$$x \in [-a, a], \quad y \in \left[-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}\right], \quad z \in \left[-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}\right]$$

Das Volumen von B ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B) &= \iiint\limits_B d(x,y,z) = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dz \\ &= 4\int_{-a}^{a} a^2-x^2\,dx = 4\left[a^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \tfrac{16}{3}a^3.\end{aligned}$$