Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
05.07.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: ($4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)
Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, sowie ihre algebraische und geometrische Vielfachheiten. Begründen Sie, warum A diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ derart, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $A^n = A^{2n}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: ($1 + 4 + 5 = 10$ Punkte)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} + 5xy - \frac{y^2}{2}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sowie die offene Menge

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Es ist

$$\partial E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}, \qquad \overline{E} = E \cup \partial E.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\overline{E}$ sein

$$\text{Maximum } M = \sup_{(x,y)\in\overline{E}} f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \text{Minimum } m = \inf_{(x,y)\in\overline{E}} f(x, y)$$

annimmt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in E$ die Ungleichungen

$$m < f(x, y) < M$$

gelten.

(c) Bestimmen m und M, sowie die Mengen

$$S_m = \left\{(x, y) \in \overline{E} : f(x, y) = m\right\} \qquad \text{und} \qquad S_M = \left\{(x, y) \in \overline{E} : f(x, y) = M\right\}$$

auf denen f seine Extrema m und M auf $\overline{E}$ annimt.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (3 + 4 + 3 = 10 Punkte)
Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha x + y^2 z^3 \\ \alpha^2 x - \alpha(x+3y) + 2xyz^3 - 2x \\ \alpha^2 y - 3\alpha(y+z) + 3xy^2z^2 + 2y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ über den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0,1]$.

(b) Bestimmen Sie die Menge S aller $\alpha \in \mathbb{R}$ für die

$$(\nabla \times f_\alpha)(x,y,z) = 0$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in S$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ über den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ t(t-1)\cos(4\pi t) \\ t(t-1)\sin(4\pi t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 4: (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(K)$ der Menge

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x + \sqrt{x^2+y^2} \right) \right\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegen durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z + \frac{x}{3} - y \\ \frac{y}{3} + e^{7z^2} - 9 \\ \tanh(x^3 - y) + y^2 + \frac{z}{3} \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial V} f(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})$ über die Oberfläche des Ellipsoiden $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{9} + 16y^2 + \pi^2 z^2 \leq 1 \right\}$. Dabei bezeichne $\vec{n} : \partial V \to \mathbb{R}^3$ die äußere Einheitsnormale.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **15.07.2014**, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den **17.07.2014**, von 13:00 bis 14:00 Uhr im Zimmer 3A-11.1 (Allianzgebäude 05.20) möglich.