Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
05.07.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1:

(a) Das charakteristische Polynom χ_A von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\
&\sim \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \\
&\sim \lambda \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array} = \lambda(1+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda(1+\lambda)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Folglich ist $\operatorname{spec}(A) = \{-1, 0, 1\}$ (2 Punkte). Da $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$ folgt, dass die geometrische und algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte übereinstimmt (deswegen ist A nach Abschnitt 18.6 des Skriptes diagonalisierbar — 1 Punkt) und 1 beträgt (1 Punkt).

(b) Berechne die Eigenräume $E(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ mit dem Eliminationsverfahren nach Gauß:

- $E(-1)$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem (-1)-Ergänzungstrick folgt $E(-1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (1 Punkt).

- $E(0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mid \cdot(-2) \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem (-1)-Ergänzungstrick folgt $E(0) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (1 Punkt).

- $E(1)$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \mid \cdot(-1) \\ + \qquad + \\ \cdot\frac{1}{2} \mid \cdot(-1) \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mit dem (-1)-Ergänzungstrick folgt $E(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (1 Punkt).

Eine Matrix S ist dann gegeben durch (1 Punkt)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (1 Punkt)

$$A^n = \left(SDS^{-1}\right)^n = \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1})}_{n \text{ Faktoren}} = SD \underbrace{(S^{-1}S)}_{=I_3} D \cdots \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_3} DS^{-1} = SD^nS^{-1}$$

mit der Diagonalmatrix

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Teilaufgabe (b). Es folgt (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
A^n = A^{2n} \quad &\Leftrightarrow \quad D^n = D^{2n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2n} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^n = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

(a) Die Funktion f ist stetig, $\overline{E}$ ist kompakt. Nach Abschnitt 19.18 des Skriptes, nimmt f auf $\overline{E}$ sein Maximum und Minimum an (1 Punkt).

(b) Angenommen, es gäbe ein $(x_0, y_0) \in E$ mit $f(x_0, y_0) \in \{m, M\}$. Dann wäre (x_0, y_0) eine Stelle eines lokalen Extremums. Da E offen ist, wäre nach Abschnitt 19.17 des Skriptes $(\nabla f)(x_0, y_0) = \vec{0}$ (1 Punkt). Es gilt

$$
\begin{aligned}
(\nabla f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -x_0 + 5y_0 \\ 5x_0 - y_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 5 \\ + \end{array} \overset{!}{=} \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x_0 + 5y_0 \\ 24y_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot -\frac{5}{24} \end{array} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot \frac{1}{24} \end{array} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad x_0 = y_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Also ist $\vec{0}$ der Einzige Kandidat für (x_0, y_0) (1 Punkt).

Es gilt (1 Punkt)

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\chi_{H_f(x_0,y_0)} = \det(H_f(x_0, y_0) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 25 = \lambda^2 + 2\lambda - 24$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit Hilfe der p-q-Formel ergibt sich $\operatorname{spec}(H_f(x_0, y_0)) = \{4, -6\}$. Also ist $H_f(x_0, y_0)$ indefinit. Nach Abschnitt 19.17 des Skriptes, hat demnach f in $(x_0, y_0) = \vec{0}$ kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt (1 Punkt).

(c) Es sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Nach Teilaufgabe (b) ist jedes $(x_0, y_0) \in S_m \cup S_M \subseteq \partial E$ eine Stelle eines lokalen Extremums von f unter der Nebenbedingung $h = 0$. Bestimme solche mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange (1 Punkt).

Zunächst gilt

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

für alle $(x,y) \in \partial E$, also $\operatorname{rang}(h'(x,y)) = 1$ für alle $(x,y) \in \partial E$ (1 Punkt). Also gibt es nach der Multiplikatorenregel von Lagrange ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = -x + 5y + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -y + 5x + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$

Abziehen der ersten Gleichung von der zweiten liefert

$$6(x - y) + 2\lambda(y - x) = 0. \tag{3}$$

Ist also $x \neq y$, so ist nach (3) $\lambda = 3$. Einsetzen in (1) und (2) liefert $x = -y$. Mit der Nebenbedingung folgt, dass $(x_0, y_0) \in \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$ (2 Punkte).

Wegen

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3$$

ist $m = -3$, $M = 2$, sowie

$$S_m = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\} \quad \text{und} \quad S_M = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

(1 Punkt).

Aufgabe 3:

(a) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\int_\gamma f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \overset{1\text{ Punkt}}{=} \int_0^1 f_\alpha(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \,\mathrm{d}t \overset{1\text{ Punkt}}{=} \int_0^1 \begin{pmatrix} \alpha t + t^5 \\ \alpha^2 t - 4\alpha t + 2t^5 - 2t \\ \alpha^2 t - 6\alpha t + 3t^5 + 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 6t^5 + (2\alpha^2 - 9\alpha)t\mathrm{d}t \overset{1\text{ Punkt}}{=} \alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha + 1$$

(b) Nach Definition des Rotationsoperators gilt:

$$(\nabla \times f_\alpha)(x,y,z) \overset{1\text{ Punkt}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha x + y^2 z^3 \\ \alpha^2 x - \alpha(x + 3y) + 2xyz^3 - 2x \\ \alpha^2 y - 3\alpha(y + z) + 3xy^2 z^2 + 2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 - 3\alpha + 6xyz^2 + 2 - 6xyz^2 \\ 3y^2 z^2 - 3y^2 z^2 \\ \alpha^2 - \alpha + 2yz^3 - 2 - 2yz^3 \end{pmatrix} \overset{1\text{ Punkt}}{=} \begin{pmatrix} \alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ 0 \\ \alpha^2 - \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Da die Nullstellen von $\alpha^2-3\alpha+2$ gerade die Menge $S_1=\{1,2\}$ und die Nullstellen von $\alpha^2-\alpha-2$ gerade die Menge $S_2=\{-1,2\}$ bilden (1 Punkt), gilt

$$(\nabla\times f_\alpha)\equiv 0 \Leftrightarrow \alpha\in S_1\cap S_2 =: S \overset{1\text{ Punkt}}{=} \{2\}\,.$$

(c) Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und $(\nabla\times f_\alpha)\equiv 0$ äquivalent zur Verträglichkeitsbedingung im $\mathbb{R}^3$ ist, ist das Integral $\int_\gamma f_\alpha(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für $\alpha\in S$ wegunabhängig (1 Punkt). Es ist $\gamma(0)=\vec{0}$ und $\gamma(1)=(\sqrt{2},0,0)$. Wähle $\tilde{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t)=(t\sqrt{2},0,0)$ für alle $t\in[0,1]$ (1 Punkt). Nach Obigem gilt

$$\int_\gamma f_\alpha(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\tilde{\gamma}} f_\alpha(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x}\int_0^1 \begin{pmatrix}\alpha\sqrt{2}t\\ \alpha^2\sqrt{2}t-\alpha\sqrt{2}t-2\sqrt{2}t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \alpha\int_0^1 2t\mathrm{d}t \overset{1\text{ Punkt}}{=} \alpha = 2.$$

Aufgabe 4:

(a) In Polarkoordinaten gilt

$$x^2+y^2\le\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow \rho^2\le\sqrt{\frac{2}{3}}(\rho\cos(\varphi)+\rho)\overset{1\text{ Punkt}}{\Leftrightarrow}\rho\le\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\cos(\varphi))$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_0^+\times\{0\})$ bzw. $\varphi\in(0,2\pi)$ und $\rho>0$. Folglich gilt für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
A(K) &\overset{1\text{ Punkt}}{=} \int_K 1\mathrm{d}\vec{x} \overset{1\text{ Punkt}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\cos(\varphi))} 1\rho\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\rho^2\right]_{\rho=0}^{\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\cos(\varphi))}\mathrm{d}\varphi\\
&\overset{1\text{ Punkt}}{=} \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
&\overset{1\text{ Punkt}}{=} \frac{1}{3}(2\pi+2\cdot 0+\pi)=\pi.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Gauß gilt

$$\int_{\partial V} f(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) \overset{1\text{ Punkt}}{=} \int_V(\nabla\cdot f)(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}.$$

Berechne

$$(\nabla\cdot f)(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3z+\frac{x}{3}-y\\ \frac{y}{3}+e^{7z^2}-9\\ \tanh(x^3-y)+y^2+\frac{z}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\overset{1\text{ Punkt}}{=}1.$$

Also gilt

$$\int_{\partial V} f(\vec{x})\cdot\vec{n}(\vec{x})\mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = \int_V 1\mathrm{d}\vec{x}.$$

Betrachte die bijektive Abbildung $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$T(x,y,z)\overset{1\text{ Punkt}}{=}\begin{pmatrix}3x\\ \frac{y}{4}\\ \frac{z}{\pi}\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Es ist

$$T'(x,y,z)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{\pi}\end{pmatrix}\quad\text{bzw.}\quad\left|\det T'(x,y,z)\right|=\frac{3}{4\pi}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ferner ist $T(K(\vec{0},1))=V$ (1 Punkt). Nach dem Transformationssatz gilt deshalb

$$\int_V 1\mathrm{d}\vec{x}=\int_{T(K(\vec{0},1))}1\mathrm{d}\vec{x}\overset{1\text{ Punkt}}{=}\int_{K(\vec{0},1)}1\left|\det(T'(\vec{y}))\right|\mathrm{d}\vec{y}=\frac{3}{4\pi}\int_{K(\vec{0},1)}\mathrm{d}\vec{y}=1.$$