Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
04.07.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+1+4+2=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Begründen Sie, warum A diagonalisierbar ist, ohne tatsächlich die Matrix anzugeben, die die Definition erfüllt.

c) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

Aufgabe 2 (2+4+1+3=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

b) Bestimmen Sie, in welchen Punkten f partiell differenzierbar ist und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

c) Sind alle partiellen Ableitungen auf ihrem Definitionsbereich stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und welche $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ und wo gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = (\operatorname{grad} f(x,y) \mid v)$?

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (4+(2+4)=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(1,1)$ gibt sowie eine Funktion $g : U \to V$, sodass die Gleichungen

$$xu + yvu^2 = 2 \qquad \text{und} \qquad xu^3 + y^2v^4 = 2$$

für $(x,y,u,v) \in U \times V$ genau dann erfüllt sind, wenn $g(x,y) = (u,v)$ gilt. Berechnen Sie außerdem $g'(1,1)$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + \sin(y) > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \log(2x + \sin(y)) \qquad \forall (x,y) \in D.$$

(i) Zeigen Sie, dass D offen ist.

(ii) Geben Sie das zweite Taylorpolynom von f im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ an.

Aufgabe 4 (4+(4+2)=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , |t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , |t| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Wo stellt die daraus resultierende Fourierreihe die Funktion f dar?

b) Gegeben sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = -x^3 + 12xy - y^3 + 42 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Finden Sie alle kritischen Punkte von g und klassifizieren Sie diese.

(ii) Begründen Sie, warum $\min\{g(x,y) \mid \|(x,y)\| \leqslant 6\}$ existiert und ausschließlich auf dem Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 6\}$ angenommen wird.

Viel Erfolg!

Hinweis für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 14.07.2015, bei Frau Dr. Nagato-Plum (Zimmer 2.029, Geb. 20.30) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind am Freitag, den 17.07.2015, unmittelbar nach der Übung möglich.