Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
09.07.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (1+4+5=10 Punkte)

Seien für alle $z \in \mathbb{C}$ die Matrizen

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1+z^2 & 0 \\ 1+\overline{z}^2 & 1 & 1+z^2 \\ 0 & 1+\overline{z}^2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Warum ist A_z für alle $z \in \mathbb{C}$ diagonalisierbar?

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_z, $z \in \mathbb{C}$, samt ihrer algebraischer Vielfachheiten. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind alle Eigenwerte von A_z verschieden? Für welche $t \in \mathbb{R}$ (!) ist A_t positiv semi-definit?

c) Geben Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix $S_z \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an, vermöge welcher $S_z^* A_z S_z$ diagonal ist.

Aufgabe 2 (2+3+3+2=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{(x+y)^2} & , x \neq -y, \\ 0 & , x = -y. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass f zwar ein globales Maximum besitzt, nach unten jedoch unbeschränkt ist. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $4xy \leqslant (x+y)^2$.

c) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

d) Für welche $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ und für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0) \mid v)$?

Aufgabe 3 ((2+5)+3=10 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x + y > 0,\, x + y > 0\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2 - x + y)^{-1} + \log(x+y).$$

(i) Zeigen Sie, dass D offen ist.

(ii) Geben Sie das zweite Taylorpolynom von f im Punkt $(1,1)$ an.

b) Skizzieren Sie den Bereich

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y \leqslant 2,\, y \leqslant 1\}$$

und berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2xy^2$ das Integral $\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Aufgabe 4 (2+4+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2(x)$.

b) Berechnen Sie den Fluss $\int_{S^+} f \cdot \mathrm{d}o$ des Vektorfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (0,0,1)$$

durch die obere Hälfte S^+ der Kugeloberfläche,

$$S^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geqslant 0\}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass für $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (ay, bx, 0)$

$$f(x,y,z) = \nabla \times v(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt.

c) Seien $a, b > 0$. Minimieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 4xy$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viel Erfolg!

Hinweis für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Freitag, den 15.07.2016, entweder in der Übung oder danach bei Herrn Michael Hott (Zimmer 2.023, Geb. 20.30) abgeholt werden. Fragen zur Korrektur sind unmittelbar nach dieser Übung möglich.