KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
09.07.2016

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUR ÜBUNGSKLAUSUR

AUFGABE 1 (1+4+5=10 PUNKTE)

Seien für alle $z \in \mathbb{C}$ die Matrizen

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & 1+z^2 & 0 \\ 1+\overline{z}^2 & 1 & 1+z^2 \\ 0 & 1+\overline{z}^2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Warum ist A_z für alle $z \in \mathbb{C}$ diagonalisierbar?

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A_z, $z \in \mathbb{C}$, samt ihrer algebraischer Vielfachheiten. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind alle Eigenwerte von A_z verschieden? Für welche $t \in \mathbb{R}$ (!) ist A_t positiv semi-definit?

c) Geben Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix $S_z \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an, vermöge welcher $S_z^* A_z S_z$ diagonal ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist A_z hermitesch und damit auch diagonalisierbar.

b)/c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Für das charakteristische Polynom von A_z gilt

$$\begin{aligned} p_{A_z}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+z^2 & 0 \\ 1+\overline{z}^2 & 1-\lambda & 1+z^2 \\ 0 & 1+\overline{z}^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+z^2 \\ 1+\overline{z}^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (1+\overline{z}^2)\begin{vmatrix} 1+z^2 & 0 \\ 1+\overline{z}^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - |1+z^2|^2] - (1-\lambda)|1+z^2|^2 = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 2|1+z^2|^2]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt nach der ersten Spalte entwickelt. Offensichtlich sind die Eigenwerte von A_z gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2/3} = 1 \pm \sqrt{2}|1+z^2|$. Für $z \in \{\pm i\}$ ist $\lambda_{1/2/3} = 1$ und damit die algebraische Vielfachheit von 1 3. Sonst sind stets alle Eigenwerte unterschiedlich und haben algebraische Vielfachheit Eins. Für $t \in \mathbb{R}$ ist stets der Eigenwert $1 - \sqrt{2}|1+t^2|$ negativ. Also ist A_t nie positiv semi-definit.

b) Im Falle $z = \pm i$ ist $A_z = I_3$ die Einheitsmatrix. Diese ist trivialerweise vermöge der Einheitsmatrix selbst ähnlich zu einer Diagonalmatrix, nämlich die Einheitsmatrix. Sei also $z \neq \pm i$. Dann ist

$$E_{A_z}(1) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1+z^2 & 0 \\ 1+\overline{z}^2 & 0 & 1+z^2 \\ 0 & 1+\overline{z}^2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2}|1+z^2|}\begin{pmatrix} 1+z^2 \\ 0 \\ -1+\overline{z}^2 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

$$E_{A_z}(1\pm\sqrt{2}|1+z^2|) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2}|1+z^2| & 1+z^2 & 0 \\ 1+\bar{z}^2 & \mp\sqrt{2}|1+z^2| & 1+z^2 \\ 0 & 1+\bar{z}^2 & \mp\sqrt{2}|1+z^2| \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left(\left\{ \frac{1}{2|1+z^2|}\begin{pmatrix} 1+z^2 \\ \pm\sqrt{2}|1+z^2| \\ 1+\bar{z}^2 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Damit erhalten wir, dass für die offensichtlich unitäre Matrix

$$S_z := \begin{pmatrix} \frac{1+z^2}{\sqrt{2}|1+z^2|} & \frac{1+z^2}{2|1+z^2|} & \frac{1+z^2}{2|1+z^2|} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\bar{z}^2}{\sqrt{2}|1+z^2|} & \frac{1+\bar{z}^2}{2|1+z^2|} & \frac{1+\bar{z}^2}{2|1+z^2|} \end{pmatrix}$$

$S_z^* A_z S_z$ diagonal ist. Speziell ist $S_z^* A_z S_z$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen 1, $1+\sqrt{2}|1+z^2|$ und $1-\sqrt{2}|1+z^2|$ in dieser Reihenfolge, wie sich leicht berechnen lässt.

Aufgabe 2 (2+3+3+2=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{(x+y)^2} & , x \neq -y, \\ 0 & , x = -y. \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass f zwar ein globales Maximum besitzt, nach unten jedoch unbeschränkt ist. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $4xy \leqslant (x+y)^2$.

c) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

d) Für welche $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ und für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0) \mid v)$?

Lösungsvorschlag

a) In den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq -x$ ist f als Komposition stetiger Funktionen offensichtlich stetig. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt für $(x_n, y_n) := (x - \frac{1}{n}, -x - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n, y_n) = -\frac{4(x-\frac{1}{n})(x+\frac{1}{n})}{\frac{4}{n^2}} = -(nx-1)(nx+1) = 1 - n^2x^2.$$

D.h., dass im Falle $x = 0$ $f(x_n, y_n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0,0)$ $(n \to \infty)$ gilt und im Falle $x \neq 0$ die Folge der Funktionswerte unbeschränkt ist. Also ist f für kein $x \in \mathbb{R}$ in $(x, -x) \in \mathbb{R}^2$ stetig.

b) Zunächst einmal gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \geqslant 4xy.$$

Insbesondere gilt dann für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq -y$ $f(x,y) \leqslant 1$. Schließlich gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) \leqslant 1$, d.h., f ist nach oben beschränkt. Wegen der obigen Äquivalenz gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x = y$. Damit lautet das globale Maximum von f gerade Eins. Wie wir in **a)** gezeigt haben, ist f in der Nähe der Punkte $(x, -x)$ mit $x \neq 0$ nach unten unbeschränkt.

c) In den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq -y$ ist f als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen selbst wieder partiell differenzierbar. Es gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{4y(x+y)^2 - 8xy(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{4xy + 4y^2 - 8xy}{(x+y)^3} = \frac{4y(y-x)}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &\overset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{4x(x-y)}{(x+y)^3}.
\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0 \overset{\text{analog}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Nun wollen wir auf die partielle Differenzierbarkeit in Punkten $(x,-x)$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eingehen. Es gilt

$$\frac{f(x+\frac{1}{n}, -x) - f(x,-x)}{\frac{1}{n}} = \frac{f(x, -(x+\frac{1}{n})) - f(x,-x)}{\frac{1}{n}} = -4nx(nx+1),$$

welches im Grenzfall $n \to \infty$ nicht konvergiert. Insbesondere ist f in den Punkten $(x,-x)$ mit $x \neq 0$ nicht partiell differenzierbar.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Für die Richtungsableitung in Richtung v müssen wir folgenden Differenzenquotienten betrachten:

$$\frac{1}{t}\Big(f(tv_x, tv_y) - f(0,0)\Big) = \frac{f(tv_x, tv_y)}{t}.$$

Im Falle $v_x \neq -v_y$ ist dies gegeben durch

$$\frac{1}{t}\Big(f(tv_x, tv_y) - f(0,0)\Big) = \frac{4v_x v_y}{t(v_x + v_y)^2}$$

und konvergiert daher genau dann im Grenzfall $t \to 0$, wenn $v_x = 0$ oder $v_y = 0$ gilt, und dann gegen 0. Im Falle $v_x = -v_y$ erhalten wir

$$\frac{1}{t}\Big(f(tv_x, tv_y) - f(0,0)\Big) = 0 \to 0 \quad (t \to 0),$$

d.h., auch hier existiert die Richtungsableitung. Insgesamt existiert die Richtungsableitung also genau dann, wenn $v_x = 0$ oder $v_y = 0$ oder $v_x = -v_y$, und in diesem Fall gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Trivialerweise erhalten wir also auch nur genau in diesem Fall

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 = (\operatorname{grad} f(0,0) | 0).$$

Aufgabe 3 ((2+5)+3=10 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x + y > 0,\, x + y > 0\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2 - x + y)^{-1} + \log(x+y).$$

(i) Zeigen Sie, dass D offen ist.

(ii) Geben Sie das zweite Taylorpolynom von f im Punkt $(1,1)$ an.

b) Skizzieren Sie den Bereich

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y \leqslant 2,\, y \leqslant 1\}$$

und berechnen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2xy^2$ das Integral $\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir definieren die Hilfsfunktionen

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - x + y, x + y).$$

h ist offensichtlich stetig und daher ist $D = h^{-1}((0,\infty) \times (0,\infty))$ als Urbild einer offenen Menge unter einen stetigen Funktion selbst offen.

(ii) Zunächst einmal gilt $(1,1) \in D$ und $f(1,1) = 1 + \log(2)$. Weiter gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1-2x}{(x^2-x+y)^2} + \frac{1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -(x^2-x+y)^{-2} + \frac{1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-2(x^2-x+y)^2 - (1-2x)2(x^2-x+y)(2x-1)}{(x^2-x+y)^4} - \frac{1}{(x+y)^2}\\
&= \frac{2(3x^2-3x-y+1)}{(x^2-x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{4},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2(1-2x)}{(x^2-x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \frac{7}{4}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2}{(x^2-x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

Damit ist das zweite Taylorpolynom T von f in $(1,1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
T(x,y) &:= f(1,1) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) + (x-1)(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\\
&\quad + \frac{(x-1)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + \frac{(y-1)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\\
&= 1 + \log(2) - \frac{x+y}{2} + 1 - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{7}{4}(x-1)(y-1) + \frac{7}{8}(y-1)^2\\
&= -\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}xy - 2x + \frac{7}{8}y^2 - 4y + \frac{9}{2} + \log(2).
\end{aligned}$$

b) B ist der Epigraph von $y = x^2$ geschnitten mit der Halbebene $y \leqslant 1$. Wegen

$$x^2 - 2 \leqslant y \quad \Rightarrow y \geqslant -2$$

erhalten mithilfe des Satzes von Fubini

$$\int_B 2xy^2 \,\mathrm{d}(x,y) \;=\; \int_{-2}^{1} \left(\int_{-\sqrt{2+y}}^{\sqrt{2+y}} 2xy^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \;=\; 0,$$

da der Integrationsbereich von x achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse ist, $x \mapsto x$ jedoch punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist. Der Satz von Fubini lässt sich wegen $B \subseteq [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-2, 1] =: I_1 \times I_2$ auf

$$\int_B f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) \;=\; \int_{I_1 \times I_2} f(x,y) c_B(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$$

anwenden.

Aufgabe 4 (2+4+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2(x)$.

b) Berechnen Sie den Fluss $\int_{S^+} f \cdot \,\mathrm{d}o$ des Vektorfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (0,0,1)$$

durch die obere Hälfte S^+ der Kugeloberfläche,

$$S^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass für $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (ay, bx, 0)$

$$f(x,y,z) = \nabla \times v(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt.

c) Seien $a, b > 0$. Maximieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x,y) \mapsto 4xy$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1.$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) \;=\; -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}).$$

Damit lauten die komplexen Fourierkoeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von f gerade $c_{\pm 2} = -\frac{1}{4}$, $c_0 = \frac{1}{2}$ und für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0; \pm 2\}$ gilt $c_k = 0$.

b) Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt

$$f(x,y,z) \;=\; \nabla \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definiert man also $v(x,y,z) := \frac{1}{2}(y,-x,0)$ und verwendet man die bezüglich S^+ positiv orientierte Parametrisierung

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t), 0\big)$$

des Randes

$$S_0 \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1, z = 0\}$$

von S^+, so erhält man mithilfe des Satzes von Stokes

$$\int_{S^+} f \cdot \mathrm{d}o \;=\; \int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \pi.$$

c) Wir definieren $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Da $\varphi^{-1}(\{0\})$ kompakt und $\operatorname{Rang}(\varphi') = 1$ auf $\varphi^{-1}(\{0\})$ ist, lässt sich die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden. Sei $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ Extremstelle von f unter der NB $\varphi(x_0,y_0) = 0$. Dann gibt es ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$f'(x_0,y_0) \;=\; -\lambda_0 \varphi'(x_0,y_0)$$

gilt, d.h.,

$$\begin{aligned} 4y_0 &= -\lambda_0 \frac{2x_0}{a^2}, \\ 4x_0 &= -\lambda_0 \frac{2y_0}{b^2}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{y_0}{b^2}$ und subtrahiert dies vom $\frac{x_0}{a^2}$-fachen der zweiten Gleichung, so erhält man

$$\frac{4y_0^2}{b^2} \;=\; \frac{4x_0^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad y_0^2 = \frac{b^2}{a^2} x_0^2.$$

Mithilfe der Nebenbedingung $\varphi(x_0,y_0) = 0$ erhalten wir also $x_0 \in \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\}$ und damit $y_0 \in \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\}$. Ist $x_0 y_0 < 0$, so wird f negativ, und daher wird das Maximum in $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b)$ oder in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}b)$ angenommen. Dort gilt $f(x_0,y_0) = 2ab$.