Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
15.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungs- und Scheinklausur

Aufgabe 1 [6+2+2=10 Punkte]

Betrachten Sie die Familie von Matrizen

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A_α.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α ähnlich einer Diagonalmatrix?

(c) Untersuchen Sie die Matrizen A_α auf Definitheit in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 [5+5=10 Punkte]

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(ii) Zeigen Sie, dass f überall partiell differenzierbar, im Nullpunkt aber nicht differenzierbar ist.

(b) Gegeben sei eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, welche im Ursprung einen kritischen Punkt mit der Hessematrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Weiter gelte $g(0) = 2$.

(i) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung T_2 bis zur zweiten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

(ii) Es bezeichne $R = g - T_2$ das Restglied in der Taylorentwicklung von g bis zur zweiten Ordnung um $0 \in \mathbb{R}^2$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{|R(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}^k} \to 0$$

für $\|(x,y)\| \to 0$?

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3 [5+5=10 Punkte]

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4, \quad t,x,y \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(t,x,y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1,1,-2)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

Die erhaltene Funktion werde mit $(t,x) \mapsto \widetilde{y}(t,x)$ bezeichnet. Berechnen Sie $\nabla\widetilde{y}(1,1)$.

(b) Wenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren an, um die Kandidaten für lokale Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 = 1\}$ zu finden.

Aufgabe 4 [3+(4+3)=10 Punkte]

(a) Sei $g \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$ und betrachten Sie die Funktion $f(\vec{x}) := g(\|\vec{x}\|)$ auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta f(\vec{x}) = g''(\|\vec{x}\|) + 2\frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}. \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ entlang der Kurve γ parametrisiert durch $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(ii) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch die (nach außen orientierte) Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$.

Hinweise für nach der Klausur

- Die korrigierten Übungsklausuren werden in den **Tutorien in der Woche vom 17.07. bis 21.07.2017** zurückgegeben und können ab **Montag, den 24.07.2017**, im Sekretariat, Kollegiengebäude Mathematik (20.30), Zimmer 2.029 abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **Donnerstag, den 27.07.2017**, von 13:00 bis 14:00 Uhr im Besprechungszimmer 2.063 (Kollegiengebäude Mathematik (20.30)) möglich.
- Sollten Sie noch nicht für die **Modulprüfung am 18.09.2017** angemeldet sein, können Sie dies noch bis **29.07.2017** nachholen. Spätere Anmeldungen können leider nicht mehr berücksichtigt werden. Wir raten Ihnen, den Erfolg der Anmeldung im Onlinesystem zu überprüfen und zu dokumentieren (z.B. mittels eines Screenshots).