Institut für Analysis
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

SS2017/18
30.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: ($8 + 8 + 4 = 20$ Punkte) In dieser Aufgabe sind numerische Fehler nicht erlaubt. Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ_A von A und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie für die Eigenwerte $\lambda_A = 1, 2, 3$ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_A(\lambda_A)$.

(c) Ist A diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2: ($(1 + 2 + 3 + 4) + 10 = 20$ Punkte) In dieser Aufgabe sind numerische Fehler nicht erlaubt.

1. Es sei $V = P[-1,1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1,1]$ und $p_m \in V$ definiert durch
$$p_m(x) := x^m$$
für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$ (*Monome*). Ferner sei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ durch
$$\langle p, q \rangle_1 = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y$$
für alle $p, q \in V$ erklärt. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ auf p_0, p_1, p_2, p_3 an.

2. Sei $B = (1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1)$. Sei L ein Operator definiert auf $Lin_{\mathbb{C}}(B)$ als
$$Lf(x) := -\frac{df}{dx}(x)\,.$$
Stellen Sie den Operator L bezüglich der Basis B dar.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: ($5+5+5+5=20$ Punkte) Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung wobei V ein normierter Raum ist und W ein Banachraum ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. L ist in 0 stetig,
2. $\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|Lv\|_W}{\|v\|_V} < \infty$,
3. L ist stetig,
4. L ist lokal gleichmäßig stetig, d.h. für jede Kugel $B_R^V(0)$ ist L auf $B_R^V(0)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 4: ($5+5+5+5=20$ Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f.

(c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

(d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$?

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können innerhalb der vorletzten Woche, **09.-13.07.2018** in den Tutorien abgeholt werden.
Fragen zur Korrektur (Scheinklausur) werden ausschließlich am Freitag, den **13.07.2018**, von **15:40** bis **16:00** im Zimmer (Zimmer 2.030, Gebäude 20.30) beantwortet.