Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
17.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (8+8+4=20 Punkte)

Für $\alpha, \beta > 0$ sei $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2-\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_{\alpha,\beta}$.

b) Bestimmen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenräume.
(Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha = \beta$ und $\alpha \neq \beta$).

c) Für welche $\alpha, \beta > 0$ ist die Matrix $A_{\alpha,\beta}$ diagonalisierbar? Geben Sie in diesem Fall eine Diagonalmatrix $D_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine invertierbare Matrix $S_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass $A_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} D_{\alpha,\beta} S_{\alpha,\beta}^{-1}$ gilt.

Aufgabe 2 ((4+3+3)+10=20 Punkte)

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(ii) Untersuchen Sie, für welche $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ die Richtungableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(iii) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 4xyz$ auf der Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst f auf Maxima in der (offenen) Menge $U_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 1\}$ und dann auf der Menge $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Aufgabe 3 ((5+5)+ (5+5)=20 Punkte)

a) Berechnen Sie

(i) den Inhalt $|A|$ der Menge $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0,2], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$,

(ii) $\displaystyle\int_B \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0,1], x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) Sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

(i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $\gamma(t) := (1 - e^{-t}, t^2, \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
Hinweis: Rechnen Sie das Integral nicht direkt aus.

Viel Erfolg!