Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
M.Sc. Yonas Mesfun

SS 2020
17.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (8+8+4=20 Punkte)

Für $\alpha, \beta > 0$ sei $A_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2-\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_{\alpha,\beta}$.

b) Bestimmen Sie die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenräume.
(Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\alpha = \beta$ und $\alpha \neq \beta$).

c) Für welche $\alpha, \beta > 0$ ist die Matrix $A_{\alpha,\beta}$ diagonalisierbar? Geben Sie in diesem Fall eine Diagonalmatrix $D_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine invertierbare Matrix $S_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass $A_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} D_{\alpha,\beta} S_{\alpha,\beta}^{-1}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
p_{A_{\alpha,\beta}}(\lambda) = \det(A_{\alpha,\beta} - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & \alpha^2-\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta-\lambda & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta-\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&\overset{(*)}{=} (\alpha-\lambda) \left| \begin{pmatrix} \alpha+\beta-\lambda & 0 & \beta \\ 0 & \beta-\lambda & 0 \\ -\alpha & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&\overset{(**)}{=} (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) \left| \begin{pmatrix} \alpha+\beta-\lambda & \beta \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)\left[\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta\right] \\
&= (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)[(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)] = (\alpha-\lambda)^2(\beta-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Determinante in $(*)$ nach der ersten Spalte und in $(**)$ nach der zweiten Spalte entwickelt. Da die Nullstellen von $p_{A_{\alpha,\beta}}$ genau die Eigenwerte von $A_{\alpha,\beta}$ sind, sehen wir, dass $\alpha, \alpha, \beta, \beta$ die Eigenwerte von $A_{\alpha,\beta}$ sind.

b) Sei zunächst $\alpha = \beta$. Dann ist

$$A_{\alpha,\alpha} - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :\alpha \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :\alpha \\ \\ \\ \end{array}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{Eig}_{A_{\alpha,\alpha}}(\alpha) = \operatorname{Kern}(A_{\alpha,\alpha} - \alpha I) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei nun $\alpha \neq \beta$. Dann ist

$$A_{\alpha,\beta} - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 - \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot\alpha \\ \\ \mid \cdot\beta \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 - \beta^2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :\beta \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 - \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{Eig}_{A_{\alpha,\beta}}(\alpha) = \operatorname{Kern}(A_{\alpha,\beta} - \alpha I) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiter ist

$$A_{\alpha,\beta} - \beta I = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & \alpha^2 - \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & \alpha^2 - \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid :(\alpha - \beta) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{Eig}_{A_{\alpha,\beta}}(\beta) = \mathrm{Kern}(A_{\alpha,\beta} - \beta I) = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Nach Aufgabenteilen a) und b) ist im Fall $\alpha = \beta$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes α gleich drei, also kleiner als seine algebraische Vielfachheit (die in diesem Fall gleich vier ist). Also ist $A_{\alpha,\beta}$ nicht diagonalisierbar, falls $\alpha = \beta$ ist. Im Fall $\alpha \neq \beta$ sind nach Aufgabenteil b) die Eigenräume $\mathrm{Eig}_{A_{\alpha,\beta}}(\alpha)$ und $\mathrm{Eig}_{A_{\alpha,\beta}}(\beta)$ jeweils zweidimensional (d.h., die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte α und β ist jeweils zwei) und nach Aufgabenteil a) ist auch die algebraische Vielfachheit von α und β jeweils zwei. Damit stimmen algebraische und geometrische Vielfachheiten von α und β jeweils überein, womit $A_{\alpha,\beta}$ diagonalisierbar ist. Fügen wir die in Aufgabenteil b) gefundenen Eigenvektoren (im Fall $\alpha \neq \beta$) zu einer Matrix $S_{\alpha,\beta}$ zusammen und bilden wir die Diagonalmatrix, die in der Diagonalen die entsprechenden Eigenwerte enthält, erhalten wir

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha+\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S_{\alpha,\beta}$ invertierbar und es gilt wie gewünscht $A_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta} D_{\alpha,\beta} S_{\alpha,\beta}^{-1}$.

Aufgabe 2 ((4+3+3)+10=20 Punkte)

a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(ii) Untersuchen Sie, für welche $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ die Richtungableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(iii) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 4xyz$ auf der Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst f auf Maxima in der (offenen) Menge $U_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 1\}$ und dann auf der Menge $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Lösungsvorschlag:

a) (i) In allen Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \neq 0$, ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Interessant ist daher nur, ob f in den Punkten $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, stetig ist. Hierzu unterscheiden wir die Fälle $y_0 \neq 0$ und $y_0 = 0$.

1. Fall: $y_0 \neq 0$:

In diesem Fall ist f unstetig in $(0, y_0)$. Denn es gilt $(\frac{1}{n}, y_0) \to (0, y_0)$ für $n \to \infty$, aber

$$f\left(\frac{1}{n}, y_0\right) = \frac{1/n}{1/n}\sqrt{\frac{1}{n^2} + y_0^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + y_0^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} |y_0| \neq 0 = f(0, y_0).$$

Also ist f in $(0, y_0)$ nicht stetig.

2. Fall: $y_0 = 0$:

In diesem Fall ist f in $(0, 0)$ stetig. Wir behaupten

$$|f(x, y)| \leq \|(x, y)\| \qquad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

wobei $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ die euklidische Norm ist. Ist $x = 0$, so ist (1) klar, da dann $f(0, y) = 0$ ist. Ist hingegen $x \neq 0$, so ist

$$|f(x, y)| = \frac{|x|}{|x|}\|(x, y)\| = \|(x, y)\|,$$

und damit (1) auch in diesem Fall erfüllt.

Ist nun $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ für $n \to \infty$, so gilt per Definition der Konvergenz im $\mathbb{R}^2$, dass $\|(x_n, y_n)\| \to 0$ für $n \to \infty$. Damit erhalten wir aus (1)

$$|f(x_n, y_n)| \overset{(1)}{\leq} \|(x_n, y_n)\| \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0, 0)$. Da die Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt war, folgt, dass f in $(0, 0)$ stetig ist.

Zusammenfassend ist also f in den Punkten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ stetig.

(ii) Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Da $f(0, 0) = 0$ ist, gilt für jedes $t \neq 0$

$$\frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{t}\frac{tv_1}{|tv_1|}\sqrt{t^2(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1}{|v_1|}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = f(v), & \text{falls } v_1 \neq 0, \\ 0 = f(v), & \text{falls } v_1 = 0. \end{cases}$$

Es folgt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = f(v).$$

Da $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)$ beliebig gewählt war, existiert also die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ (im Punkt $(0, 0)$) für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = f(v)$.

(iii) Nach Aufgabenteil b) gilt $\partial_1 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 1$ und $\partial_2 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0$. Wäre nun f in $(0,0)$ differenzierbar, so müsste $f'(0,0) = (\partial_1 f(0,0)\ \partial_2 f(0,0)) = (1\ 0)$ sein und

$$f(v) \overset{\text{(ii)}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = f'(0,0) \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1$$

für alle $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ gelten. Dies ist jedoch offensichtlich nicht der Fall. Also kann f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein.

b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass f als stetige Funktion auf der kompakten Menge M ein globales Maximum annehmen muss. Sei also $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = \max_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z)$. Läge (x_0, y_0, z_0) im Inneren von M, also in $U_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, so hätte f in (x_0, y_0, z_0) insbesondere ein lokales Maximum. Dann müsste aber (x_0, y_0, z_0) ein stationärer Punkt, d.h.,

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_0 z_0 \\ 4x_0 z_0 \\ 4x_0 y_0 \end{pmatrix} \overset{(!)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

sein. Man sieht schnell, dass (2) genau dann erfüllt ist, wenn zwei Koordinaten null sind, d.h., wenn

$$(x_0, y_0, z_0) \in S := \{(x,0,0), (0,y,0), (0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x|, |y|, |z| < 1\}.$$

Wäre $(x_0, y_0, z_0) \in S$, so würde (per Definition von f) $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ sein. Da f in U_1 offensichtlich auch positive Werte annimmt, kann (x_0, y_0, z_0) nicht in U_1 liegen. Somit muss (x_0, y_0, z_0) auf dem Rand von M, also in $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ liegen. Um (x_0, y_0, z_0) zu bestimmen, benutzen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Wir definieren

$$h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Dann gilt $N = h^{-1}(\{0\})$. Weiter ist $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{rg} h'(x,y,z) = 1$ für alle $(x,y,z) \in N$. Sei nun $L(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z)$, $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$. Nach der Multiplikatorenregel von Lagrange muss dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$0 = \operatorname{grad} L(x_0, y_0, z_0, \lambda) \iff \begin{pmatrix} 4y_0 z_0 \\ 4x_0 z_0 \\ 4x_0 y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda x_0 \\ -2\lambda y_0 \\ -2\lambda z_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)} \end{matrix}$$

gilt. Betrachten wir nun die Gleichung (V) $:= x_0 \cdot \text{(I)} + y_0 \cdot \text{(II)} + z_0 \cdot \text{(III)}$, so erhalten wir

$$12x_0 y_0 z_0 = -2\lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \overset{\text{(IV)}}{=} -2\lambda \qquad \text{(V)}.$$

$$\iff \lambda = -6x_0 y_0 z_0.$$

Setzen wir dies in (I) ein, erhalten wir $4y_0 z_0 = -2(-6x_0 y_0 z_0)x_0 = 12x_0^2(y_0 z_0)$. Da $y_0, z_0 \neq 0$ (anderenfalls wäre $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, was nicht sein kann), folgt hieraus $1 = 3x_0^2$, also $x_0 =$

$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Durch Einsetzen von $\lambda = -6x_0y_0z_0$ in (II) bzw. (III) erhält man genauso $y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bzw. $z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Somit muss

$$(x_0, y_0, z_0) \in T := \left\{ \left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{3}} \right) \in \mathbb{R}^3 \colon \varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k = \pm 1 \right\}.$$

Durch Einsetzen sieht man, dass $f(x, y, z) = \pm 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$ für alle $(x, y, z) \in T$ gilt. Damit muss

$$\max_{(x,y,z)\in M} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

sein.

Bemerkung: Man kann das Maximum von f auf N auch ohne die Methode von Lagrange bestimmen, in dem man Symmetrien ausnutzt: Ist (x_0, y_0, z_0) wie oben, so können wir Zylinderkoordinaten nutzen und $(x_0, y_0, z_0) = (r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0), z_0)$ mit eindeutig bestimmtem $r \in (0, 1]$, $\varphi_0 \in (0, 2\pi)$, $z_0 \neq 0$ schreiben (man beachte, dass $x_0, y_0, z_0 \neq 0$ die Fälle $r = 0, \varphi_0 \in \{0, 2\pi\}, z_0 = 0$ ausschließt). Betrachten wir nun die Funktion

$$g\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R},\ g(\varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z_0) = 4z_0r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 2r^2z_0\sin(2\varphi),$$

so muss $g(\varphi_0) = \max_{\varphi\in(0,1)} g(\varphi)$ gelten, da die Punkte $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z_0)$ für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ in N liegen. Je nach Vorzeichen von z_0 muss also die Funktion $(0, 2\pi) \ni \varphi \mapsto \sin(2\varphi)$ ein Maximum oder Minimum in φ_0 annehmen. Hieraus folgt $\varphi_0 \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, was stets $|\cos(\varphi_0)| = |\sin(\varphi_0)|$ und damit auch $|x_0| = |y_0|$ impliziert. Da die Menge N und die Funktion f invariant gegenüber Permutationen (Vertauschungen) der Koordinaten ist, erhalten wir weiter $|x_0| = |z_0|$ und $|y_0| = |z_0|$, also insgesamt $|x_0| = |y_0| = |z_0|$. Aus der Bedingung $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ folgt dann $|x_0| = |y_0| = |z_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und damit $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Aufgabe 3 ((5+5)+ (5+5)=20 Punkte)

a) Berechnen Sie

   (i) den Inhalt $|A|$ der Menge $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0, 2], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$,

   (ii) $\displaystyle\int_B \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}(x, y, z)$, wobei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

   (i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

   (ii) Berechnen Sie $\int_\gamma f(x, y, z) \cdot \mathrm{d}(x, y, z)$, wobei $\gamma(t) := (1 - e^{-t}, t^2, \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
   Hinweis: Rechnen Sie das Integral nicht direkt aus.

Lösungsvorschlag:

a) (i) Wir benutzen das Prinzip von Cavalieri: Für $z \in [0,2]$ ist

$$\begin{aligned} Q(z) :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y,z) \in A\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 1 - x^2\} \end{aligned}$$

ein Normalbereich bzgl. der x-Achse (und damit insbesondere messbar). Es ist

$$|Q(z)| = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \qquad \text{für alle } z \in [0,2].$$

Da A (als Normalbereich im $\mathbb{R}^3$) messbar ist, gilt nach dem Prinzip von Cavalieri

$$|A| = \int_0^2 |Q(z)| \, \mathrm{d}z = \frac{4}{3} \int_0^2 \mathrm{d}z = \frac{8}{3}.$$

(ii) Sei

$$g \colon [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; g(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

die Zylinderkoordinatenabbildung. Dann gilt $B = g(C)$, wobei $C := [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,1]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_B \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_C \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \, \mathrm{d}(r,\varphi,z) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\sqrt{1+r^2} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z \\ &= (\sqrt{2}-1) \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z = 2\pi(\sqrt{2}-1) \int_0^1 \mathrm{d}z = 2\pi(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

b) Ist g eine Stammfunktion von f, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= \int g_x(x,y,z) \, \mathrm{d}x = \int f_1(x,y,z) \, \mathrm{d}x = \int y^2 z^3 \, \mathrm{d}x = xy^2z^3 + c_1(y,z), \\ g(x,y,z) &= \int g_y(x,y,z) \, \mathrm{d}y = \int f_2(x,y,z) \, \mathrm{d}y = \int 2xyz^3 \, \mathrm{d}y = xy^2z^3 + c_2(x,z), \\ g(x,y,z) &= \int g_z(x,y,z) \, \mathrm{d}z = \int f_3(x,y,z) \, \mathrm{d}z = \int 3xy^2z^2 \, \mathrm{d}z = xy^2z^3 + c_3(x,y). \end{aligned}$$

Man überlegt sich schnell, dass $c_1(y,z) = c_2(x,z) = c_3(x,y) \equiv c \in \mathbb{R}$ und damit

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; g(x,y,z) = xy^2z^3 + c \tag{3}$$

sein muss. Man prüft schnell nach, dass g so definiert wie in (3) (mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$) tatsächlich eine Stammfunktion von f ist.

(i) Sei $g(x,y,z) := xy^2z^3$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Nach Aufgabenteil b) ist dann g eine Stammfunktion von f und daher

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z) &= g(\gamma(2\pi)) - g(\gamma(0)) \\ &= g(1 - e^{-2\pi}, 4\pi^2, 1) - g(0,0,1) \\ &= 16\pi^4(1 - e^{-2\pi}). \end{aligned}$$