Lösung zur Probeklausur

Monday, 28. June 2021 15:34

A1

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Lösung:

a) Partielle differenzierbarkeit

In $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ ist f stetig partiell differenzierbar (klar)

In $(x,y)=(0,0)$ gilt

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}0=0 \Rightarrow \partial_x f(0,0)=0$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}0=0 \Rightarrow \partial_y f(0,0)=0$$

D.h f ist auf $\mathbb{R}^2$ partiell diff'bar

Zeige nun noch, dass f stetig partiell diff'bar in $(x,y)=(0,0)$

für $(x,y)\neq(0,0)$ gilt

$$\partial_x f(x,y)=\partial_x\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\frac{y(x^2-y^2)+xy2x}{x^2+y^2}-\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}2x$$
$$=\frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)+2x^2y(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$|a-b|\leq|a|+|b|$ ↓

$$\Rightarrow |\partial_x f(x,y)|\leq\frac{|y|\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2}+\frac{2x^2|y|}{x^2+y^2}+\frac{2x^2|y|\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2}$$
$$\leq\frac{|y|\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}}+\frac{2\cancel{(x^2+y^2)}|y|}{\cancel{x^2+y^2}}+\frac{2x^2|y|\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$$
$$=3|y|+2x^2|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

Da $f(x,y)=-f(y,x)$ gilt $\partial_x f(x,y)=-\partial_y f(x,y)$ und die Stetigkeit der partiellen Ableitung gilt also in beiden Fällen

Wir bestimmen nun noch die zweiten Ableitunge

$$\partial_y\partial_x f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{\partial_x f(0,h)-\overbrace{\partial_x f(0,0)}^{=0}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\partial_x f(0,h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big(\frac{h(0-h^2)+0}{0+h^2}-\overbrace{\frac{0\cdot h(0-h^2)}{(0+h^2)^2}2\cdot0}^{=0}\Big)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h^3}{h^3}=-1$$

$\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

D.h der Grenzwert ex. und $\partial_y\partial_x f(0,0)=-1$

$$\partial_y f(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)-xy2y}{x^2+y^2}-\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}2y$$

$$\Rightarrow \partial_x\partial_y f(0,0)=\lim_{h\to0}\Big(\frac{\partial_y f(h,0)-\overbrace{\partial_y f(0,0)}^{=0}}{h}\Big)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\partial_y f(h,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big(\frac{h(h^2-0)-0}{h}-\underbrace{\frac{0}{h^4}}_{=0}\Big)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=1$$

$\Rightarrow \partial_x\partial_y f(0,0)=1$ aber $\partial_y\partial_x f(0,0)=-1$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 2

$$A=\begin{pmatrix}-\frac12&0&\frac12\\-\frac12&1&\frac12\\\frac12&0&-\frac12\end{pmatrix}$$

a)

$$\det(A-\lambda\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}-\frac12-\lambda&0&\frac12\\-\frac12&1-\lambda&\frac12\\\frac12&0&-\frac12-\lambda\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-\lambda&0&\frac12\\0&1-\lambda&\frac12\\-\lambda&0&-\frac12-\lambda\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\lambda\left\langle\begin{pmatrix}-1&0&\frac12\\0&1-\lambda&\frac12\\-1&0&-\frac12-\lambda\end{pmatrix}\right\rangle(-1)=\lambda\left\langle\begin{pmatrix}-1&0&\frac12\\0&1-\lambda&\frac12\\0&0&-1-\lambda\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\lambda(-1-\lambda)\left\langle\begin{pmatrix}-1&0\\0&1-\lambda\end{pmatrix}\right\rangle=-\lambda(1+\lambda)(\lambda-1)$$
$$=\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$$

$\Rightarrow \sigma(A)=\{1,0,-1\}$

Es ist $|\sigma(A)|=3$ Die Algebr. Vielfachheiten sind als einfache NST, des characteristischen Polynoms, $\mu_A(1)=\mu_A(0)=\mu_A(-1)=1$, sodass $\mu_A(1)+\mu_A(0)+\mu_A(-1)=3=|\sigma(A)|$

Es gilt für die geometrische Vielfachheiten, dass diese ≥1 sein müssen und max. der alg. Vielfachheit entsprechen

Es ist also $\mu_G(1)=\mu_G(0)=\mu_G(-1)=1$

Da $\mu_G(1)+\mu_G(0)+\mu_G(-1)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ gilt, dass es eine Basis aus Eigenvektoren gibt bzgl. welche A diagonal ist.

b) Bestimme S, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.
Wir bestimmen also die Eigenvektoren.

Es lässt sich raten

$$\begin{pmatrix}-\frac12&0&\frac12\\-\frac12&1&\frac12\\\frac12&0&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=v_1$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda=1$

$\lambda=0$: Es ist trivialer weiße

$$\begin{pmatrix}-\frac12&0&\frac12\\-\frac12&1&\frac12\\\frac12&0&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in\ker(A)$$

D.h $v_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist normierter EV.

Bestimme EV zum EW $\lambda=-1$ mit Gauß-Algo

$$\begin{pmatrix}-\frac12+1&0&\frac12\\-\frac12&2&\frac12\\\frac12&0&-\frac12+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\\-\frac12&2&\frac12\\\frac12&0&\frac12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+\\+\end{matrix}(-1)$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac12\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Wir lesen den gesuchten Vektor ab.

Es ist $v_3=\frac{2}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\\frac12\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\left|\begin{pmatrix}1\\\frac12\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(\frac12)^2}=\sqrt{2+\frac14}=\sqrt{\frac54}$

ist normierte EV

Die Matrix $S=\begin{pmatrix}|&|&|\\v_1&v_2&v_3\\|&|&|\end{pmatrix}$ diagonalisiert A, sodass

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=:D$$

c) Für welche $n\in\mathbb{N}$ gilt $A^n=A^{2n}$

Es ist $D^n=(S^{-1}AS)^n=S^{-1}A^nS$

$\Rightarrow A^{2n}=SD^{2n}S^{-1}$

Es ist $D^{2n}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^n$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^{2n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A^n=SD^nS^{-1}$ mit $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}$

D.h: $A^{2n}=A^n$

$\Leftrightarrow S^{-1}A^{2n}S=S^{-1}A^nS$) Multiplizier S^{-1} von links und S von rechts

$\Leftrightarrow D^{2n}=D^n$

$\Leftrightarrow (-1)^{2n}=(-1)^n \Leftrightarrow 1=(-1)^n$

$\Leftrightarrow$ n ist gerade

A3

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z)=2\sin(xy)+e^{\sin(xz)}-x-z$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: Es ex. offene Mengen $U\subseteq\mathbb{R}^2, V\subseteq\mathbb{R}$ mit $(0,0)\in U$ und $1\in V$ und eine Abb. $\varphi\in C^1(U,V)$ mit

⊛ $f(x,y,\varphi(x,y))=0 \quad \forall(x,y)\in U\times V$

Bew: Beacht es ist

$$f(0,0,1)=2\sin(0)+e^{\sin(0)}-0-1$$
$$=1-1=0$$

D.h $(x,y)=(0,0)$ und $z=1$ erfüllt die Bed. ⊛ für $\varphi(0,0)=1$

a) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz über die implizit def. Funktion. Wir prüfen also dessen Voraussetzungen.

Zunächst ist $f:\overset{\text{offene-Menge ✓}}{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion als Verkettung von stetig diff'baren Funktionen

Wir bilden die Jacobi-Matrix.

Es ist $\partial_x f(x,y,z)=2\cos(xy)y+e^{\sin(xz)}\cos(xz)z-1$

$\partial_y f(x,y,z)=2\cos(xy)x$

$\partial_z f(x,y,z)=xe^{\sin(xz)}\cos(xz)-1$

mit $\partial_x f(0,0,1)=0+e^0\cdot1-1=0$, $\partial_y f(0,0,1)=0$

$$(Jf)(x,y,z)=\big(\underbrace{\partial_x f(x,y,z)\;\partial_y f(x,y,z)}_{\partial_{(x,y)}f(x,y,z)};\ \underbrace{\partial_z f(x,y,z)}_{\neq0,\text{ für }(x,y)=(0,0)!}\big)$$

$(Jf)(0,0,1)=(0\ 0\ -1)$

Da $\partial_z f(0,0,1)$ invertierbar ist, gilt die Behauptung

b) Wir bestimmen die Ableitung von φ.

Es ist nach der Kettenregel für $\vec a\in U$

$$0\underset{\nearrow}{=}\partial_{\vec a}f(\vec a,\varphi(\vec a))=\partial_{(x,y)}f(0,0,1)+\underbrace{\partial_z f(0,0,1)}_{\in\mathbb{R}}\nabla\varphi(0,0)$$

$f(\vec a,\varphi(\vec a))\equiv0$ auf U

$$\Rightarrow\nabla\varphi(0,0)=-\frac{\partial_{(x,y)}f(0,0,1)}{\partial_z f(0,0,1)}=\vec0$$

Nach a)

c) $f(x,y)=x\cdot y \qquad M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$

Lösungen: Bestimme das Maximum von f auf M.
Zunächst ist klar, dass f auf M sein Maximum als Stetige Fkt. auf einer kompakten Menge tatsächlich annimmt.

Ganz schnell:

$$x^2+y^2-(x-y)^2=x^2+y^2-x^2-y^2+2xy$$
$$=2xy$$

$$\Rightarrow xy=\frac12(x^2+y^2-\underbrace{(x-y)^2}_{\geq0})\leq\frac{x^2+y^2}{2}$$

D.h $xy\leq\frac12$ auf M

Für: $x=y=\frac{1}{\sqrt2}$ gilt $x^2+y^2=1$ und $xy=\frac12$

oder $x=y=-\frac{1}{\sqrt2}$ gilt $x^2+y^2=1$ und $xy=\frac12$

Das sieht man schnell weg $\binom{x}{y}=\binom{r\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)}=\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ in M

$\Rightarrow \cos(\varphi)\sin(\varphi)=\frac12 \Rightarrow \frac12\sin(2\varphi)=\frac12$

$\Rightarrow \sin(2\varphi)=1 \Rightarrow$ Beh.

Alternative Lösung 1)

Lösung: Es gilt in ebenen Polarkoordinaten, wobei Φ der entsprechende C^1-Diffeomorphismus ist,

$$f(\Phi(r,\varphi))=f(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi))=r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$$

$$f(\Phi(r,\varphi))\big|_M=\cos(\varphi)\sin(\varphi)$$

Wir definieren $u:[0,2\pi)\to\mathbb{R}$ mit $u(\varphi):=f(\Phi(r,\varphi))\big|_M$

$\cos^2-\sin^2$
$=\cos^2-(1-\cos^2)$
$=2\cos^2-1$

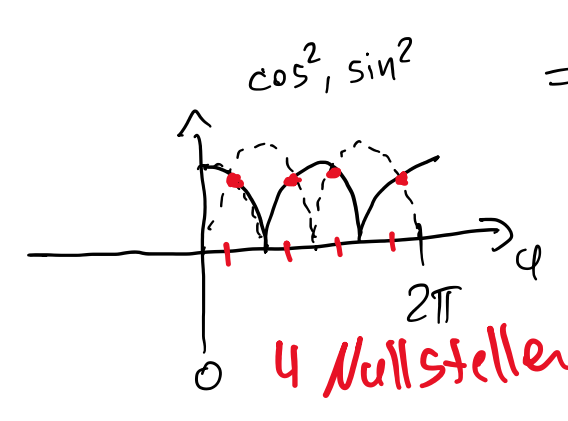
$\partial_\varphi u(\varphi)=-\sin(\varphi)^2+\cos^2(\varphi)$ $\qquad\sin^2+\cos^2=1$

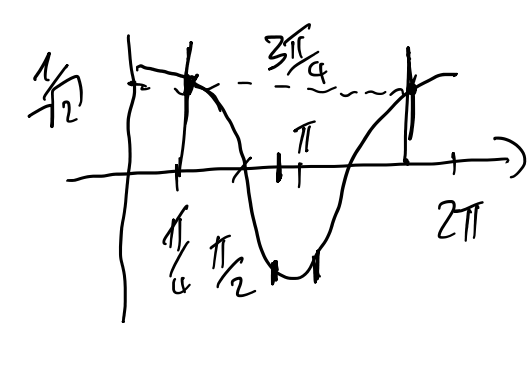
$\Rightarrow \partial_\varphi u(\varphi)=0 \Leftrightarrow \cos^2(\varphi)=\sin^2(\varphi)$

$\Leftrightarrow \cos^2(\varphi)=1-\cos^2(\varphi)$

$\Leftrightarrow \cos^2(\varphi)=\frac12$

$\Leftrightarrow \cos(\varphi)=\pm\frac{1}{\sqrt2}$





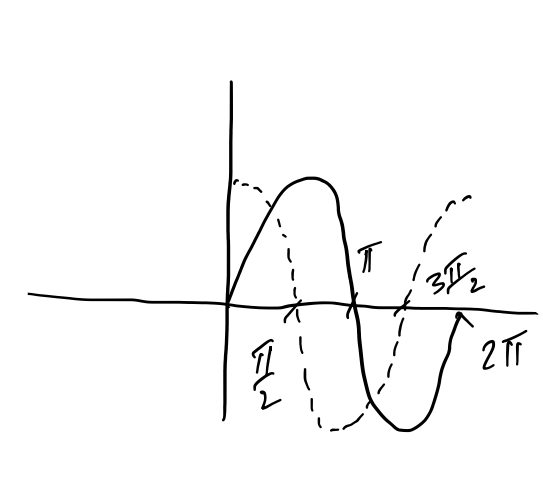
Aus Formelsammlung:

$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \varphi=\frac\pi4$ od $\varphi=2\pi-\frac\pi4$

$\cos(\varphi)=-\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \varphi=\frac{3\pi}{4}$ od $\varphi=\pi+\frac\pi4$

dh $\varphi\in\{\frac\pi4,\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\}$ sind mögliche Kandidaten für das Maximum!

Bestimme 2. Ableitung



$$u''(\varphi)=\partial_\varphi^2u(\varphi)=\partial_\varphi(2\cos^2(\varphi)-1)$$
$$=-4\cos(\varphi)\sin(\varphi)$$
$$<0$$

für $\varphi\in(0,\frac\pi2)\cup(\pi,\frac{3\pi}{2})$

und $u''(\varphi)=-4\cos(\varphi)\sin(\varphi)>0$

für $\varphi\in(\frac\pi2,\pi)\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

$\Rightarrow \begin{cases}\frac\pi4,\frac{5\pi}{4}\text{ sind lohale Maxima}\\\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\text{ sind lohale Minima}\end{cases}$

$u(r,\varphi)=(f\circ\Phi)(r,\varphi)$ Da Φ bijektiv ist, gilt f nimmt seine Maxima bei $\Phi(1,\frac\pi4)$ und $\Phi(1,\frac{5\pi}{4})$ and

Es ist $f(\Phi(1,\frac\pi4))=\cos(\frac\pi4)\sin(\frac\pi4)$
$=-\cos(\frac\pi4+\pi)(-1)\sin(\frac\pi4+\pi)$
$=f(\Phi(1,\frac{5\pi}{4}))$

$\Rightarrow f(\cos(\frac\pi4),\sin(\frac\pi4))=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac12$

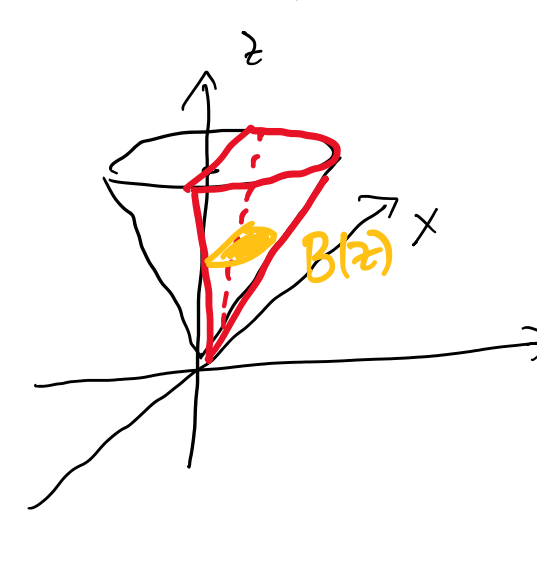
D.h $(x,y)=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ oder $(x,y)=(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2})$ sind gesuchte Maxima!

Alternative Lösung II: Lagrange Multiplikator
(Wäre auch möglich gewesen aber unnötig)

A4

Bestimme:

a) $\int_A y\,d(x,y,z)$ mit $A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z\in[0,1],y\geq0,x^2+y^2\leq z\}$



Beachte

$$A=\bigcup_{z\in[0,1]}B(z)$$

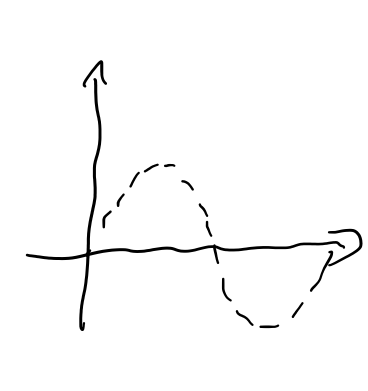
und $B(z):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq z \text{ und } y\geq0\}$

Lösung Das Integral ex., da $0\leq y\leq1$ auf A und A kompakt.

Es gilt nach dem Prinzip von Cavalieri und Fubini

$$\int_A y\,d(x,y,z)=\int_0^1\int_{B(z)}y\,d(x,y)\,dz$$

Beachte es ist $B\subseteq\mathbb{R}^2$ und mit

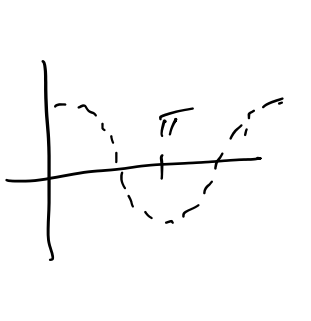


$$\tilde B=\{(r,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\mid r^2\leq z \text{ und } r\sin(\varphi)\geq0\}$$
$$=\{(r,\varphi)\in[0,\infty\times[0,2\pi]\mid 0\leq r\leq\sqrt z \text{ und } \varphi\in[0,\pi]\}$$

gilt $\Phi(B)=\tilde B$ wobei Φ die Transformation in ebene Polarkoordinaten ist.

Es gilt also nach dem Transformationssatz

$$\int_{B(z)}y\,d(x,y)=\int_{\Phi^{-1}(B(z))}r\sin(\varphi)\,|\det(J\Phi)(r,\varphi)|\,d(r,\varphi)$$
$$=\int_0^\pi\int_0^{\sqrt z}r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi$$
$$=\int_0^\pi\sin(\varphi)\,d\varphi\,\Big[\frac13r^3\Big]_0^{\sqrt z}$$
$$=[-\cos(\varphi)]_0^\pi\,\frac13z^{3/2}=\frac23z^{3/2}$$



$$\Rightarrow\int_A y\,d(x,y,z)=\int_0^1\frac23z^{3/2}\,dz=\frac23\Big[\frac25z^{5/2}\Big]_0^1$$
$$=\frac23\cdot\frac25=\frac{4}{15}$$

b) Es seien $a,b>0$ und E die von $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ berandete Menge.

Bestimme $|E|$

Lösung: Es ist

$$|E|=\iint_E d(x,y)=\iint_E(\partial_1V_2(x,y)-\partial_2V_1(x,y))\,d(x,y)$$

für $\vec V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $\vec V(x,y)=\frac12\binom{-y}{x}$. Denn $\partial_1V_2(x,y)-\partial_2V_1(x,y)=\frac12+\frac12=1$

$\vec V$ ist auf E ein C^1-Vektorfeld (Polynome in den Komponenten) und E ist ein einfach zsh. Gebiet (Ellipse)

Beacht γ ist regulär, denn γ ist diffbar mit:

$$\dot\gamma(t)=\binom{-a\sin(t)}{b\cos(t)}\neq\binom00$$

$\Rightarrow$ Satz von Gauß

$\gamma(t)=\binom{a\cos(t)}{b\sin(t)}$

$=\vec V(\gamma(t))=\frac12\binom{-b\sin(t)}{a\cos(t)}$

$$|E|=\oint_\gamma\vec V\cdot d\vec s$$
$$=\int_{[0,2\pi]}\vec V(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$
$$=\frac12\int_{[0,2\pi]}\binom{-b\sin(t)}{a\cos(t)}\binom{-a\sin(t)}{b\cos(t)}$$
$$=\frac12\int_0^{2\pi}+ab\sin^2(t)+ab\cos^2(t)\,dt$$
$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{+\sin^2(t)+\cos^2(t)}_{=1}dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab$$

Was genau dem Flächeninhalt einer Ellipse entspricht.