Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis

PROBEKLAUSUR FÜR ÜBUNGSSCHEIN

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

◯ HM I ◯ HM II ◯ HM III Klausur im ◯ Frühjahr ◯ Herbst 20____

Name:	Vorname:	Matrikelnummer:

Blattanzahl	Punkte A. 1	Punkte A. 2	Punkte A. 3	Punkte A. 4	Summe

Das ist ein Open-Book Exam.
Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Bearbeitungsblatt.
Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungszusammenfassung, Übungsblätter der Vorlesung und deren Lösungen, eigene Mitschriebe, Formelsammlung auf Ilias.

Führen Sie folgende Schritte vor dem Hochladen aus:

1. Füllen Sie dieses Deckblatt mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer aus, kreuzen Sie „HM I“, „HM II“ bzw. „HM III“ und „Frühjahr“ bzw. „Herbst“ an und vervollständigen Sie die Jahreszahl.
2. Tragen Sie auf jedem Bearbeitungsblatt die **Nummer derjenigen Aufgabe ein, die Sie auf diesem Blatt bearbeiten**. Versehen Sie den Kopf des Blattes außerdem mit Name, Vorname und Matrikelnummer.
3. Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.
Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert. Streichen Sie ungültige Lösungswege.

Unterschreiben Sie diese Erklärung:

1. Mit dem Upload meiner Klausur bestätige ich, dass ich die Klausur selbstständig und ohne die Hilfe Dritter verfasst habe.
2. Ebenso versichere ich, dass ich die Klausur ausschließlich unter Verwendung der von der Prüferin / von dem Prüfer freigegebenen Hilfsmittel erstellt haben.
3. Mir ist bekannt, dass die Prüfung mit der Note 5,0 „nicht ausreichend“ oder mit „nicht bestanden“ bewertet wird, wenn ich das Ergebnis der Erfolgskontrolle durch Täuschung oder Benutzung nicht zugelassener Hilfsmittel beeinflusse oder selbiges versuche und dass ich in schwerwiegenden Fällen von der Durchführung weiterer Erfolgskontrollen ausgeschlossen werden kann.
4. Sofern ich die Klausur nicht rechtzeitig hochlade oder auf anderen Weg einreiche, ist mir bewusst, dass von der Korrektur der Klausur abgesehen werden kann und die Leistung in diesen Fällen als mit der Note 5,0 „nicht ausreichend“ beziehungsweise mit „nicht bestanden“ bewertet gilt.

____

Datum, Name

Lineare Algebra

Eigenraum: $E_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$.
geometrische Vielfachheit von λ: $\dim E_A(\lambda)$.
algebraische Vielfachheit von λ: Vielfachheit von λ als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms p_A.
Ähnliche Matrizen: $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen ähnlich $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $B = S^{-1}AS$.
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \Leftrightarrow$ Alg. und geom. Vielfachheit der Eigenwerte stimmt überein

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch** $\Leftrightarrow A = A^T$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch (oder selbstadjungiert)** $\Leftrightarrow A = A^* = \bar{A}^T \Rightarrow A$ diagonalisierbar, Eigenwerte reell, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal

A ist **orthogonal** $\Leftrightarrow A^TA = I$

A ist **unitär** $\Leftrightarrow A^*A = I$

A orthogonal bzw. unitär $\Leftrightarrow$ Zeilen bzw. Spalten bilden Orthonormalbasis

Gram-Schmidt: Seien $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren $b_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ und für $n = 2, ..., N$ $c_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, w_n \rangle b_i, b_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}$. Dann bilden $b_1, \dots b_N$ ein Orthonormalsystem und $\mathrm{lin}\{b_1, ..., b_N\} = \mathrm{lin}\{w_1, ..., w_N\}$
Definitheit von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $A = A^T$

$$A \text{ ist} \left\{\begin{matrix} \text{positiv} & \begin{bmatrix} \\ \text{semi} \end{bmatrix} & \text{definit} \\ \text{negativ} & \begin{bmatrix} \\ \text{semi} \end{bmatrix} & \text{definit} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon\ x^TAx \left\{\begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ EW von } A\colon\ \lambda \left\{\begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix}\right\} 0$$

Ansonsten ist A indefinit. **Kriterium von Hurwitz:** Ist $A = A^T = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots, n$$

Ableitungen

Richtungsableitung: $f : D \to \mathbb{R}^n$ in $x_0 \in D$ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(x)$

Differenzierbarkeit: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. f heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, falls $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Bezeichnung: $f'(x_0) := A$.

Kriterium: Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in x_0, so ist f in x_0 differenzierbar.

Gradient: $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \implies \mathrm{grad}\, f(x_0)$ steht senkrecht auf der Niveaulinie $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$.
Kettenregel: $\underbrace{(g \circ f)'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^{p\times n}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\in\mathbb{R}^{p\times m}} \underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$.

Satz über implizit definierte Funktionen: Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$. Um $f(x, y) = 0$ bzgl. y zu lösen nahe bei (x_0, y_0). Bedingung: $f(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar. Es gilt für die Lösung $y(x)$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Satz für Richtungsableitung: f differenzierbar in $x_0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
$f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Matrix der Ableitung: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0)\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Hesse Matrix $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$

$$H_f(x_0) \coloneqq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right)_{j,k=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Taylorformel $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0, h \in \mathbb{R}^n$, $S[x_0, x_0 + h] \subset D \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ex. $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot \operatorname{grad} f(x_0) + \frac{1}{2}(H_f(\xi)h) \cdot h.$$

Fourierreihen

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar, dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp[-ikt]dt$ der k-te Fourierkoeffizient von f.
Es gilt der Zusammenhang zu den reellen Fourierkoeffizienten

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt,$$
$$b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt.$$

Es gilt

$$\sum_{|k|<n} c_k(f) \exp[ikt] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kt).$$

Optimierung

Satz über lokale Extremstellen: Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $x_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

$$H_f(x_0) \left\{\begin{matrix} \begin{bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{bmatrix} \text{definit} \\ \text{indefinit} \end{matrix}\right\} \implies f \text{ hat in } x_0 \left\{\begin{matrix} \text{ein lokales} \begin{bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{bmatrix} \\ \text{einen Sattelpunkt} \end{matrix}\right\}$$

Multiplikatorenregel von Lagrange Sei $p < n$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $N = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$. Hat f in $x_0 \in D$ lok. Extremum unter Nebenbedingung $h = 0$ und $\operatorname{rang} h'(x_0) = p$, dann existiert $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$ mit $\operatorname{grad} L(x_0, \lambda^0) = 0$, wobei $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$.

Integralsätze

Rotation, Divergenz: $v = (v_1 ... v_n)^T$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$$\operatorname{div} v := \nabla \cdot v := \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$$

$$n = 3: \qquad \operatorname{rot} v := \nabla \times v := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Laplace: $f(x_1, .., x_n)$ Skalarfeld: $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f$. **Rechenregeln:** $f, g, v \in C^1$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\nabla \cdot (fv) = f\ (\nabla \cdot v) + (\nabla f) \cdot v$$

$$\nabla \times (fv) = f\ (\nabla \times v) + (\nabla f) \times v \quad (n = 3)$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\ \Delta g \quad (f, g \in C^2).$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad f \in C^2$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0, \quad v \in C^2.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f, \quad f \in C^2.$$

Kurvenintegrale von Skalarfeldern

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Bogenlänge von Raumkurven

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad s(x) := \int_a^x \|\gamma'(t)\|\ dt$$

$L(\gamma) := s(b)$ Bogenlänge, $\gamma_0 = \gamma \circ s^{-1}$ natürliche Parametrisierung.

Kurvenintegrale von Vektorfeldern

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma v \cdot ds := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Kurvenintegral Gradientfelder

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma \operatorname{grad} f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Verträglichkeitsbedingung: Sei $v = (v_1, ..., v_n)$ C^1 Vektorfeld. Dann v Potentialfeld $\Longrightarrow$ $\partial_j v_k = \partial_k v_j$, $\forall j, k = 1, ..., n$. Ist Definitionsmenge von v einfach zusammenhängend so gilt die umgekehrte Richtung.

Integralsatz von Gauß in $\mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma v \cdot\ ds = \int_{\overline{G}} (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y))\ d(x, y),$$

wobei G 'links' von γ liegt und G einfach zusammenhängend.

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$ (N: äußerer Normaleneinheitsvektor, G und γ wie bei Gauß mit nat. Param.)

$$\int_\gamma w \cdot N\, ds = \int_{\overline{G}} \operatorname{div} w\, d(x, y)$$

Parameterdarstellung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$**:**

$$\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$$

Integralsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

$$\int_\Gamma v \cdot\ ds = \int_{\mathcal{F}_0} \operatorname{rot} v \cdot\ do,$$

wobei G und γ wie bei Gauß, g Parameterdarstellung,$\Gamma = g \circ \gamma$, $\mathcal{F}_0 = g(\overline{G})$.

Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$

$$\int_\mathcal{F} do = \int_U |\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)|\ d(u, v).$$

Normaleneinheitsvektor: $(u, v) \in U$

$$N(g(u, v)) = \pm \frac{\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)}{|\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)|}$$

Oberflächenintegrale von $\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$

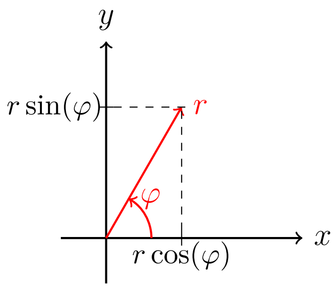
$$\int_\mathcal{F} f \underbrace{do}_{do := |\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)|\, d(u,v)} := \int_U f(g(u, v))\ |\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)|\ d(u, v)$$

$$\int_\mathcal{F} w \cdot \underbrace{do}_{do := (\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v))\, d(u,v)} := \int_U w(g(u, v)) \cdot (\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v))\ d(u, v)$$

Koordinatentransformationen

Transformationsformel $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, $g : B \mapsto A$ surjektiv, injektiv auf B° und $\det g' \neq 0$ auf B° dann $\int_A f(x)\,dx = \int_B f(g(y))|\det(g'(y))|\,dy$.

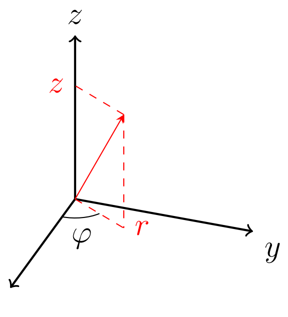
Polarkoordinaten



$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi) = r$$

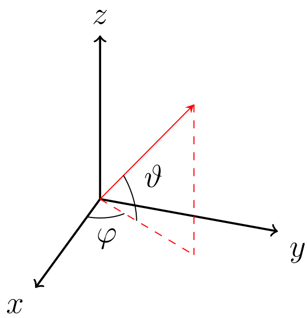
Zylinderkoordinaten



$$g(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi,z) = r$$

Kugelkoordinaten



$$g(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi,\vartheta) = r^2\cos\vartheta$$

Funktionentheorie

Cauchyscher Integralsatz: f holomorph, G offen und einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel: f holomorph, G offen und einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen und positiv orientiert, z_0 im Inneren von γ

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Folgerung: holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(k+1)}}\,dz$$

Satz von Liouville: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.
Identitätssatz: G Gebiet, f und g holomorph auf G, $M = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ habe einen HP in G $\Rightarrow f = g$ auf G.
Residuensatz: G einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen und positiv orientiert, $z_0, ..., z_n$ im Innern von γ, $f : G \setminus \{z_0, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}(f; z_j)$$

Berechnung von Residuen

- hebbare Singularität: $\operatorname{res}(f; z_0) = 0$
- f hat in z_0 Pol n-ter Ordnung

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z - z_0)^n f(z)\right)\right]\Bigg|_{z=z_0}$$

Allgemeines

Arkusfunktionen:

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \quad \arctan\colon \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \tfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

partielle Integration: $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$
Substitution: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

$g(x)$	$\int g(x)dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

SS23

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungs- bzw. Scheinklausur

Aufgabe 1: (6 + 8 + 6 = 20 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte $0, 2$ und 4 hat.

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ von A eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums $E_A(\lambda)$.

(c) Berechnen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $A = W^2$ gilt. Es genügt wenn Sie W als ein Produkt von explizit bestimmen Matrizen anzugeben.

Aufgabe 2: (10 + 10 = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie jenes Rechteck, welches in der Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 6\} \tag{1}$$

liegt und dessen Seiten parallel zur $x-$ bzw. $y-$Achse sind so, dass der Umfang des Rechteckes maximal ist.
Hinweis: Dieses Problem lässt sich mithilfe der Multiplikationsregel von Lagrange formulieren.

b) Es sei

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3 \leq y \leq 2x\}$$

Parametrisieren Sie den Rand ∂C der Menge C und berechnen Sie den Umfang von C.
Hinweis: Um das Integral $\int \sqrt{1 + 4x^2}dx$ zu bestimmen substituiert man $x = \frac{1}{2}\sinh(t)$. Sie müssen das Ergebnis nicht vereinfachen!

Aufgabe 3: (6 + 6 + 8 = 20 Punkte)
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)\sin(y)}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Ist f in $(0, 0)$ stetig?

b) Existieren die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$?

c) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar (d.h. total differenzierbar)?

Hinweis für c): Wie sieht gegebenenfalls die Ableitung von f in $(0, 0)$ aus? Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit anhand der Definition.

Aufgabe 4: (10 + 6 + 4 = 20 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebungen $U \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in U$ und $(1, -1) \in V$ nach (y, z) auflösbar ist. Sei $g : U \to V$ diese Auflösung. Bestimmen Sie dei Ableitung $g'(0)$.

b) 1) Klassifizieren Sie die Singularitäten von

$$\frac{z}{\sin(iz)}, z \in \mathbb{C}.$$

2) Bestimmen Sie die Wegintegrale

$$\int_{\gamma_k} \frac{z}{\sin(iz)} dz$$

für $k \in \{1, 2\}$ entlang der Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_1(t) = \frac{\pi}{2} \exp[it], \ \gamma_2(t) = \frac{3\pi}{2} \exp[it].$$