

Musterlösung zur Probeklausur

A1,

a) $A = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom

$$C_P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2-\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\nearrow}{=} -\sqrt{2} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} + (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Entwicklung
nach letzter
Zeile

$$= -2(2-\lambda) + (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 2)$$

$$= (2-\lambda)(-2 + (2-\lambda)^2 - 2) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 4)$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad \text{falls} \quad \lambda = 2$$

Angenommen $\lambda \neq 2$ dann muss $(2-\lambda)^2 = 4$ gelten

$$\text{daher ist} \quad 2-\lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 2$$

$$\text{D.h.} \quad \sigma(A) = \{0, 2, 4\}$$

Alle Eigenwerte sind einfach also ex. zu jedem Eigenwert genau ein Eigenvektor.

b1 Wir bestimmen die Eigenvektoren

- $\lambda = 0$: Wir führen den Gauß-Algorithmus durch um $\ker(A)$ zu bestimmen

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{+} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Ablesen bestimmen wir mit dem -1-Trick den

Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} =: \vec{v}_1$ und $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1+2+1} = 2$

$$\Rightarrow \hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 2$

Wir bestimmen Kern $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Ablesen bestimmen wir mit dem -1-Trick den

Eigenvektore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$

Wir bestimmen Kern $\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$ mit dem Gauß- Algo.

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \xrightarrow{+} \leadsto \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot \sqrt{2}]{+} \leadsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen durch Ablesen mit dem -1-Trick den EV

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{v}_3\| = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da alle Eigenvektoren einfach und Asymmetrisch ist,
bilden die normierten Eigenvektoren eine ONB
(in diesem Fall die Eigenbasis)

⊆ Die Matrix A ist dargestellt in der Eigenbasis
diagonal. Es sei

$$V = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \\ | & | & | \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{dann ist } A = V D V^T$$

$$\text{wobei } V^T V = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es ist } \sqrt{D} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ so, dass } \sqrt{D} \sqrt{D} = D$$

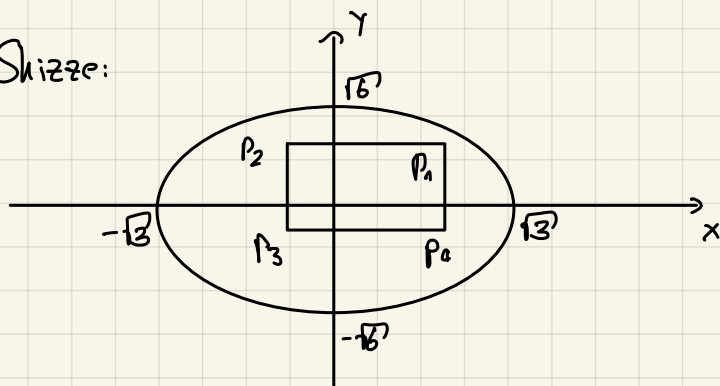
$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= V D V^T = V \sqrt{D} \sqrt{D} V^T \\ &= \underbrace{V \sqrt{D} V^T}_{=: W} V \sqrt{D} V^T = W W' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dieses Produkt ist nach Aufgabenstellung nicht mehr auszuführen ☺

A2

Skizze:



Sei B das Rechteck mit den Eckpunkten $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4 \in E$

$$\text{Sei } x_0 = \max_{i=1, \dots, 4} (\bar{p}_i)_1 \quad \text{und} \quad y_0 = \max_{i=1, \dots, 4} (\bar{p}_i)_2$$

$$\text{dann ist} \quad 6 \geq 2x_0^2 + y_0^2 \geq 2(\bar{p}_i)_1^2 + (\bar{p}_i)_2^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

d.h. wir können den Umfang maximieren indem wir

$$|(\bar{p}_i)_1| = x_0 \quad \text{und} \quad |(\bar{p}_i)_2| = y_0 \quad \text{setzen.}$$

Es ist also $p_1 = (x_0, y_0)$ für $x_0, y_0 \geq 0$ und

$$p_2 = (-x_0, y_0), \quad p_3 = (-x_0, -y_0), \quad p_4 = (x_0, -y_0)$$

so, dass $B(x_0, y_0)$ das Rechteck mit den Punkten $p_1, \dots, p_4$ den Umfang $|\partial B(x_0, y_0)| = 4(x_0 + y_0)$ hat.

Angenommen $(x_0, y_0) \in \partial E$ d.h. $2x_0^2 + y_0^2 < 6$

dann ex. $p = (x, y) \in E$ mit $2x^2 + y^2 = 6$ wobei

$$x \geq x_0 \quad \text{und} \quad y \geq y_0 \quad \text{und} \quad |\partial B(x, y)| = 4(x + y) > 4(x_0 + y_0)$$

d.h. wir nehmen an, dass $(x, y) \in \partial E$ d.h. $2x^2 + y^2 = 6$

Wir maximieren also $f(x, y) = 4(x + y)$ unter der Nebenbedingung

$$h(x, y) = 2x^2 + y^2 - 6 = 0$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und der Rand ∂E ist kompakt.

Wir prüfen die Rang-Bedingung $\nabla h(x, y) = (4x \quad 2y) = (0, 0)$

Falls $x=y=0$ aber $x=y=0 \notin \partial E$

$\Rightarrow h$ hat auf ∂E immer vollen Rang.

Wir suchen also kritische Stellen der Lagrang-Fkt.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 4(x+y) + \lambda(2x^2+y^2-6)$$

$$\Rightarrow (\nabla \mathcal{L})(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 4+4\lambda x \\ 4+2\lambda y \\ 2x^2+y^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus } 1 = (-1)\lambda y \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} y = \frac{-1}{\lambda} \\ \text{aus } 2 = (-1)\lambda x \Rightarrow 2x = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow y = -2x \quad \text{falls } \lambda \neq 0$$

Einsetzen in $h(x,y)=0$ liefert

$$2x^2 + 4x^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}$$

Falls $\lambda = 0 \leadsto$ keine Lösung!

$$\text{D.h. } x \in \{\pm 1\} \text{ und damit } 2+y^2-6=0 \\ \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y \in \{\pm 2\}$$

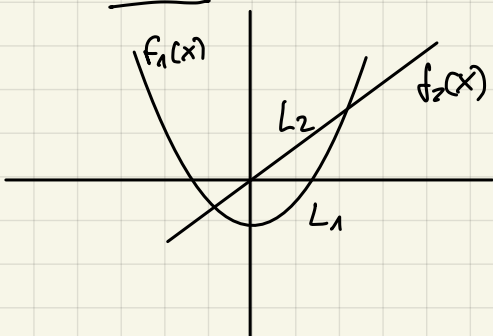
$$\Rightarrow (x,y) \in \{(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2)\}$$

Wie bereits geklärt können wir $x,y \geq 0$ wählen und damit ist $p = (x,y) = (1,2)$ der einzige Kandidat.

$$\text{Hier gilt } U(x,y) = 4(x+y) = 12$$

C

Skizze



Die Menge C ist ein Normalbereich der Funktionen $f_1(x) = x^2 - c$ und $f_2(x) = bx$

Wir bestimmen zunächst die Schnittpunkte

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - c = bx \Leftrightarrow x^2 - bx - c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4c})$$

In unserem Fall gilt $b=2, c=3$
und damit $x = 1 \pm \sqrt{4 \cdot 4} = 1 \pm 2$
d.h. $x_0 = -1$ und $x_1 = 3$

Die Parametrisierungen der Segmente des Randes sind

$$L_1 = \{ (f_1^x) \mid -1 \leq x \leq 3 \}$$

$$L_2 = \{ (f_2^x) \mid -1 \leq x \leq 3 \}$$

Wir bestimmen die Längen dieser Segmente

$$|L_1| = \int_{-1}^3 \| (f_1^x)' \| dx = \int_{-1}^3 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

dieses Integral lösen wir mit der Substitution

$$x = \frac{1}{2} \sinh(t) \quad \text{denn} \quad (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + \sinh^2(t))^{\frac{1}{2}} = |\cosh(t)|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |L_1| &= \int_{-1}^0 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^3 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx & t &= \operatorname{arcsinh}(2x) \\ &= - \int_0^1 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^3 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx & \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2} \cosh(t) \\ &= \int_1^3 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\operatorname{arcsinh}(2)}^{\operatorname{arcsinh}(6)} |\cosh(t)| \frac{1}{2} \cosh(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \int_a^b \cosh^2(t) dt = \int_a^b \cosh(t) \sinh(t) dt - \int_a^b \sinh^2(t) dt$$

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{arcsinh}(2) \\ b &= \operatorname{arcsinh}(6) \end{aligned}$$

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sinh^2 = \cosh^2 - 1$$

$$\begin{aligned} &= \left[(1 + \sinh^2(t))^{\frac{1}{2}} \sinh(t) \right]_a^b \\ &\quad - \int_a^b (\cosh^2(t) - 1) dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \int_a^b \cosh^2(t) dt = (6\sqrt{37} - 2\sqrt{5}) + (b - a)$$

$$|L_1| = \frac{1}{2} \int_0^b \cosh^2(t) = (3\sqrt{37} - \sqrt{5}) + \operatorname{arcsinh}(6) - \operatorname{arcsinh}(2)$$

$$|L_2| = \int_{-1}^3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| dt = \sqrt{5} \int_{-1}^3 dt = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |L_1| + |L_2| = 3(\sqrt{37} - \sqrt{5}) + \operatorname{arcsinh}(6) - \operatorname{arcsinh}(2)$$

A3 a) f ist in $(0,0)$ stetig denn für $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ gilt

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x_n) \sin(y_n)}{|x_n| + |y_n|} \right| \leq \frac{|x_n| |y_n|}{|x_n| + |y_n|} = |x_n| \underbrace{\frac{|y_n|}{|x_n| + |y_n|}}_{\leq 1} \leq |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Wobei wir $|\sin(x)| \leq |x|$ für $|x|$ klein genug benutzt haben (Vorlesung HM 1)

b) Die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ existieren

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) \Big|_{(0,0)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(0+\varepsilon, 0) - f(0,0)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{0-0}{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

und $\partial_x f(x,y) \Big|_{(0,0)} = \partial_y f(x,y) \Big|_{(0,0)}$ da $f(x,y) = f(y,x)$

$\sqsubset$ f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Angenommen f wäre diffbar dann muss $f'(0) = 0$

da $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$ und daher muss

$$\frac{|f(\vec{0}+h) - \overset{=0}{f(0)} - \overset{=0}{f'(0)h}|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{für } |h| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{|f(h)|}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

D.h. Es muss
$$\frac{|\sin(h_1) \sin(h_2)|}{\frac{|h_1| + |h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}} \rightarrow 0$$

Wähle speziell $h_1 = h_2 = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2(\frac{1}{n})}{\frac{2}{n}} (2n^2)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (n \sin(\frac{1}{n}))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Allerdings gilt $n \sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{\cos(0)}{1} = 1$
nach HM 1.

Daher ist f in $(0,0)$ nicht diffbar.

A41

a)

$$2x + y + z = 0$$

$$xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

Wir definieren $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\text{Es ist } f(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 + 1 - 1 \\ 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f_1, f_2 sind als Polynome in $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und damit ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

Wir prüfen die Voraussetzungen des Satzes über die implizit definierten Fkt. nach.

Tatsächlich ist $f(0,1,-1) = 0$ s.o.

Wir bestimmen die Jacobi-Matrix

$$f'(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ z \end{pmatrix}}_{\partial_x f} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}}_{\partial_{(y,z)} f}$$

Damit wir den Satz anwenden können muss

$$\det(\partial_{(2,3)} f) = \gamma \neq 0 \text{ gelten}$$

Da wir nach einer Auflösung in der Umgebung von $\gamma=1$ suchen gilt dies also auf dieser Umgebung.

Die gesuchten Umgebungen und eine differenzierbare Fkt $g: U \rightarrow V$ mit $f(x, g(x)) = 0$ auf U ex. demnach.

Wir bestimmen die Ableitung $g'(0)$. Nach der Kettenregel muss

$$0 = \partial_x f(x, g(x)) \Big|_{x=0} = \partial_1 f(x, g(x)) \Big|_{x=0} + \partial_{(2,3)} f(x, g(x)) g'(x) \Big|_{x=0}$$

Da $f(x, g(x)) \equiv 0$ auf U

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g'(0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = g'(0)$$

Wir bestimmen also noch die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Es ist} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I_1 - I_2}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I_2 \leftrightarrow I_1}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}$$

$$\Rightarrow g'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $f(z) = \frac{z}{\sin(iz)}$

Zunächst ist klar, dass $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
 $\sin(\cdot)$ hat keine weiteren komplexen NST

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{ix} = e^{-ix} \quad |e^{ix}$$

$$\Leftrightarrow e^{2ix} = 1$$



für $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{i2a} = e^{2b}$$

da $|e^{i2a}| = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ muss $e^{2b} = 1$
 $\Rightarrow b = 0$

$$\Rightarrow x = a \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{und } \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$$

$$\text{D.h. } \sin(iz) = 0 \Leftrightarrow z = in\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$1. \text{ Fall } n=0 \Rightarrow z=0$$

In diesem Fall ist die Singularität hebbar,
 denn für $z \rightarrow 0$ ist

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{|z|}{|\sin(iz)|} \\ &= \frac{1}{\sin(iz) - \sin(i0)} \\ &\xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(i \cdot 0)} = 1 \end{aligned}$$

Nach der Definition der Ableitung.

D.h. f kann in $z=0$ mit $f(0)=1$ stetig fortgesetzt werden.

2. Fall $n \neq 0$ in diesen Fällen handelt es sich um einen Pol 1. Ordnung. Denn:

$$\begin{aligned}(z - in\pi) f(z) &= z \frac{z - in\pi}{\sin(iz)} = -iz \frac{+iz + n\pi}{\sin(iz)} \\&= -iz \frac{iz - (-n\pi)}{\sin(iz) - \sin(-n\pi)} \\&= -iz \left(\frac{\sin(iz) - \sin(-n\pi)}{iz - (-n\pi)} \right)^{-1}\end{aligned}$$

Für $z \rightarrow in\pi \Rightarrow iz \rightarrow -n\pi$ gilt nach der Def. der Ableitung

$$\frac{\sin(iz) - \sin(-n\pi)}{iz - (-n\pi)} \rightarrow \cos(-n\pi) = -\cos(n\pi) \neq 0$$

$$\Rightarrow (z - in\pi) f(z) \xrightarrow{z \rightarrow in\pi} -i(in\pi) \frac{1}{\cos(n\pi)} = \frac{n\pi}{\cos(n\pi)}$$

2) Der Weg γ_1 schließt nur die hebbare Singularität bei $z=0$ ein und damit gilt nach Cauchy-Integral-Satz, da $f(z)$ auf $B_{\frac{\pi}{4}} \setminus \{0\}$ holomorph ist,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

Der Weg γ_2 schließt die Singularitäten bei

$z = \pm i\pi$ ein. Es gilt nach Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z) dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i\pi) + \operatorname{Res}(f, -i\pi)) \\&\stackrel{\text{Teil 1)}}{=} 2\pi i \left(\frac{\pi}{\cos(\pi)} + \frac{-\pi}{\cos(-\pi)} \right) = 4\pi i \frac{\pi}{\cos(\pi)} \\&= -4\pi^2 i\end{aligned}$$