Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Scheinklausur

Höhere Mathematik 2 für die Fachrichtung Physik

Sommersemester 2024

19. Juli 2024

Aufgabe 1 ($14 + 6 = 20$ Punkte):
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(b) Ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie, wenn möglich, eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S mit $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 2 ($10 + 10 = 20$ Punkte):
Bestimmen Sie jeweils alle lokalen Extrema der Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy - x$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = (1 + 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Aufgabe 3 ($8 + 12 = 20$ Punkte):
Die Vektorfelder $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ 2y \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad G(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ \mathrm{e}^z \\ y\mathrm{e}^z + 2xz \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}(x,y,z), \qquad \int_\gamma G \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$$

wobei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Aufgabe 4 ($10 + 10 = 20$ Punkte):

(a) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A yx \, d(x,y).$$

(b) Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = z^2,\ 1 \leq z \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Oberfläche

$$\int_B 1 \, do.$$