Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum Scheinklausur
Höhere Mathematik 2 für die Fachrichtung Physik
Sommersemester 2024

19. Juli 2024

Aufgabe 1 ($14 + 6 = 20$ Punkte):
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(b) Ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie, wenn möglich, eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S mit $A = SDS^{-1}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Wir beginnen damit, das charakteristische Polynom auszurechnen:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda-1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{1. Spalte}}}{=} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2) = -(\lambda-1)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}).$$

Wir lesen ab, dass $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ die Eigenwerte von A sind. Nun berechnen wir die Eigenräume:

$$E_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

$$E_A(\sqrt{2}) = \mathrm{Kern}(A - \sqrt{2}I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

$$E_A(-\sqrt{2}) = \mathrm{Kern}(A + \sqrt{2}I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

(b) A ist diagonalisierbar, da die algebraische und geometrische Vielfachheit zu jeden Eigenwert gleich sind (beide sind gleich 1). Die gesuchten Matrizen D, S bestehen aus den Eigenwerten bzw. Eigenvektoren. Diese lesen wir aus (a) ab und erhalten so:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 ($\mathbf{10 + 10 = 20}$ Punkte):

Bestimmen Sie jeweils alle lokalen Extrema der Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy - x$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Es gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ als Polynomfunktion. Wir betrachten zunächst die notwendige Bedingung für lokale Extrema, d.h. wir suchen alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$0 \overset{!}{=} \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y - 1 \\ -2y + 2x \end{pmatrix}.$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert $y \overset{!}{=} x$ und $0 \overset{!}{=} 3x^2 + 2x - 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x+1)$, und damit die kritischen Stellen $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und $(-1,-1)$.

Wir berechnen zunächst für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und überprüfen dann die Bedingungen aus der Vorlesung:

- $\underline{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}$: Hier gilt $H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\det H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -8 < 0$, d.h. $H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ist indefinit. Nach Vorlesung hat f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kein lokales Extremum.
- $\underline{(-1,-1)}$: Hier gilt $H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\det H_f(-1,-1) = 8 > 0$, sowie $(H_f(-1,-1))_{11} = -6 < 0$, d.h. $H_f(-1,-1)$ ist negativ definit. Nach Vorlesung hat f in $(-1,-1)$ ein lokales Maximum.

(b) Es ist $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ als Komposition von C^∞-Funktionen. Wir berechnen zunächst Gradient und Hesse-Matrix:

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ -(4x^2+2)y \end{pmatrix},$$
$$H_g(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 8x^4 - 16x^2 + 2 & (8x^3 - 4x)y \\ (8x^3 - 4x)y & (4x^2+2)(2y^2-1) \end{pmatrix}$$

Zunächst berechnen wir die kritischen Punkte von g. Es gelten

$$\operatorname{grad} g(x,y) = 0 \iff 2x - 4x^3 = 0 = y \iff x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \wedge y = 0.$$

Nun überprüfen wir, ob die kritischen Punkte lokale Extrema sind:

- $\underline{(0,0)}$: Hier ist $H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit wegen $\det H_g(0,0) < 0$, also hat g in $(0,0)$ einen Sattelpunkt und daher keinen kritischen Punkt.
- $\underline{(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)}$: Hier ist $H_g(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ negativ definit und daher hat g in $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ sowie in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ein (sogar striktes) lokales Maximum.

Aufgabe 3 ($8 + 12 = 20$ Punkte):
Die Vektorfelder $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ 2y \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad G(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ \mathrm{e}^z \\ y\mathrm{e}^z + 2xz \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}(x,y,z), \qquad \int_\gamma G \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$$

wobei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a)
- Zu F: Da $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ist eine notwendige (und hinreichende) Bedingung dafür, dass F ein Gradientenfeld ist, dass F' symmetrisch ist, also dass $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1, \partial_2 F_3 = \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 = \partial_1 F_3$ gelten. Nun ist aber

$$\partial_1 F_2(x,y,z) = \partial_x(2y) = 0 \neq 2y = \partial_y(y^2) = \partial_1 F_2(x,y,z)$$

für $y \neq 0$, was zeigt, dass F kein Gradientenfeld ist.

- Zu G: *Bemerkung:* Durch "scharfes Hinsehen" kann man hier direkt erkennen, dass G ein Gradientenfeld ist und $\phi(x,y,z) = xz^2 + y\mathrm{e}^z$ eine Stammfunktion ist. Wenn man das nicht sieht, kann man z.B. wie folgt argumentieren:
Wie für F überprüfen wir die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_1 F_2 = 0 = \partial_2 F_1, \qquad \partial_2 F_3 = \mathrm{e}^z = \partial_3 F_2, \qquad \partial_3 F_1 = 2z = \partial_1 F_3.$$

Da sie erfüllt sind, existiert nach Vorlesung (wir benutzen hier dass $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist) eine Stammfunktion von G. Nach Vorlesung gilt weiter: Ist $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve, die $(0,0,0)$ mit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ verbindet, so ist

$$\phi(x,y,z) = \int_\gamma G(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$$

nicht von der Wahl von γ abhängig und definiert eine Stammfunktion von G. Wir wählen als γ die Verbindungsgerade $\gamma(t) = t(x,y,z)$ und erhalten so

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (tz)^2 \\ \mathrm{e}^{tz} \\ ty\mathrm{e}^{tz} + 2t^2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 3t^2xz^2 + y(1+tz)\mathrm{e}^{tz} \,\mathrm{d}t \\ &= xz^2 \big[t^3\big]_{t=0}^1 + y\big[t\mathrm{e}^{tz}\big]_{t=0}^1 = xz^2 + y\mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

(b)
- Zu F: Wir berechnen

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 2t - t^2 \,\mathrm{d}t = \big[t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}.$$

- Zu G: Da G ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\int_\gamma G \cdot \mathrm{d}(x,y,z) = \phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)) = 1 - 0 = 1.$$

Aufgabe 4 ($10 + 10 = 20$ Punkte):

(a) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A yx \, d(x,y).$$

(b) Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2, \ 1 \leq z \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Oberfläche

$$\int_B 1 \, do.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Die Menge A läst sich parametrisieren durch Polarkoordinaten $(x,y) = g(r,\varphi) = (r\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$ für $(r,\varphi) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$. Damit folgt mit der Folmelsammlung $g'(r,\varphi) = r$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_A yxd(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3 \sin(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi dr \\
&= \int_0^1 r^3 \tfrac{1}{2} [\sin^2(\varphi)]_0^{\pi/2} dr \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^1 r^3 dr \\
&= \tfrac{1}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Wir nutzen die Parametrisierung $g : [0, 2\pi] \times [1,4] \to B$ mit

$$g(\varphi, r) = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Damit ist g surjektiv und injektiv im inneren von $[0,2\pi] \times [1,4]$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi g \times \partial_r g &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\|\partial_\varphi g \times \partial_r g\| = \sqrt{2} r.$$

Damit folgt das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned}
\int_B 1 \, do &= \int_1^4 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} r \ d\varphi dr \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_1^4 r \ dr \\
&= \sqrt{2}\pi \cdot [r^2]_1^4 \\
&= \sqrt{2} \cdot 15\pi
\end{aligned}$$