UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2008

Formelsammlung

Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{array}{rcll}
e^{i\varphi} & = & \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), & \varphi \in \mathbb{R} \\
e^{z} & = & e^{x}(\cos y + i \sin y), & z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \\
\sin z & = & \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), & z \in \mathbb{C} \\
\cos z & = & \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & z \in \mathbb{C} \\
\sin(x \pm y) & = & \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), & x, y \in \mathbb{R} \\
\cos(x \pm y) & = & \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), & x, y \in \mathbb{R} \\
\sin^2(x) & = & \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big), & x \in \mathbb{R} \\
\cos^2(x) & = & \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big), & x \in \mathbb{R} \\
\sin(\frac{\pi}{6}) & = & \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \\
\cos(\frac{\pi}{6}) & = & \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(\omega t + \varphi) \text{ mit } \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tan\varphi = \frac{B}{A}$$

Laplacetransformation von Funktionen

$$
\begin{array}{rcll}
t^n & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{n!}{s^{n+1}}, & n \in \mathbb{N}_0 \\
e^{at}t^n & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, & n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{C} \\
\sin(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{a}{s^2+a^2}, & a \in \mathbb{R} \\
\cos(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{s}{s^2+a^2}, & a \in \mathbb{R} \\
t\sin(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, & a \in \mathbb{R} \\
t\cos(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, & a \in \mathbb{R} \\
e^{bt}\sin(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{a}{(s-b)^2+a^2}, & a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \\
e^{bt}\cos(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, & a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \\
(f * g)(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathscr{L}\{f\}(s) \cdot \mathscr{L}\{g\}(s) & \\
f'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+), & f \text{ stetig und } f' \text{ stückweise stetig} \\
f^{(n)}(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & s^n\mathscr{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+), & n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \text{ stückw. stetig} \\
(-t)^n f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f\}(s), & n \in \mathbb{N}
\end{array}
$$

Es sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig mit $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$, $t \ge 0$, für ein $M \ge 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

Dämpfungsregel: Für $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s-a), \qquad Re\, s > \gamma + Re\, a.$$

Verschiebungsregel: Für $a > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{\sigma(t-a)\,f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{f\}(s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

Anfangswertsatz: Falls $f(0+) := \lim_{t\to 0+} f(t)$ existiert, so gilt

$$\lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(0+).$$

Endwertsatz: Existiert $f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t)$, dann gilt

$$\lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(\infty).$$

Distributionen

Die Distributionen $S, T \in \mathscr{D}'$ seien exponentiell beschränkt mit positivem Träger.

Ableitung von Distributionen: $(DT)(\varphi) = -T(\varphi'), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$

Translationen Definiere für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{R}$

$$\tau_b f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad (\tau_b f)(t) := f(t-b).$$

Die um b nach rechts verschobene Distribution $\tau_b T \in \mathscr{D}'$ ist gegeben durch

$$(\tau_b T)(\varphi) = T(\tau_{-b}\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Faltung von Distributionen: Die Faltung von T und S ist definiert durch

$$T * S(\varphi) := T(t \mapsto S(\tau_{-t}\varphi)), \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Es gelten

$$
\begin{array}{rcll}
\mathscr{L}\{D^n T\}(s) & = & s^n \mathscr{L}\{T\}(s), & n \in \mathbb{N} \\
\mathscr{L}\{\tau_b T\}(s) & = & e^{-bs}\mathscr{L}\{T\}(s), & b \ge 0 \quad \text{und } \tau_b T = T * \delta_b \\
\mathscr{L}\{\delta_b\}(s) & = & e^{-bs}, & b \ge 0 \\
\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{T\}(s) & = & \mathscr{L}\{(-t)T\}(s) & \\
\mathscr{L}\{S * T\}(s) & = & \mathscr{L}\{S\}(s) \cdot \mathscr{L}\{T\}(s) &
\end{array}
$$

Komplexe Partialbruchzerlegung

Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s) = n$. Dann existieren *verschiedene* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ und

$$Q(s) = (s-a_1)^{k_1} \cdot (s-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (s-a_m)^{k_m}.$$

Es gibt dann komplexe Koeffizienten $\alpha_l^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m,\ l = 1, \ldots, k_j)$ so, dass

$$
\begin{aligned}
\frac{P(s)}{Q(s)} \;=\; & \frac{\alpha_1^{(1)}}{s-a_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(s-a_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(s-a_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{\alpha_1^{(2)}}{s-a_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(s-a_2)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(s-a_2)^{k_2}} + \\
& + \ldots + \\
& + \frac{\alpha_1^{(m)}}{s-a_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(s-a_m)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(s-a_m)^{k_m}}.
\end{aligned}
$$

Im Fall $m = n$ und $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$ gilt

$$\alpha_1^{(j)} = \Big((s-a_j)\frac{P(s)}{Q(s)}\Big)\Big|_{s=a_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Laurententwicklung und Residuenberechnung

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\alpha \in U$ und $F : U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $U \setminus \{\alpha\}$. Dann existieren (eindeutig bestimmte) Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, mit

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k, \qquad 0 < |z-\alpha| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z-\alpha| < R\} \subseteq U$.
Das Residuum von F in α ist durch

$$\operatorname{res}(F;\alpha) = a_{-1}$$

gegeben. Besitzt F in α einen höchstens n-fachen Pol ($n \in \mathbb{N}$), dann ergibt sich

$$F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

und es gilt:

$$\operatorname{res}(F;\alpha) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-\alpha)^n F(z)\Big)\right)\Bigg|_{z=\alpha}.$$

Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $G(\alpha) \neq 0$, $H(\alpha) = 0$, $H'(\alpha) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{res}(F;\alpha) = \frac{G(\alpha)}{H'(\alpha)}.$$

Residuensatz: Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex und γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in G. Die Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ sei in G holomorph mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ innerhalb von γ. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(F;\alpha_k).$$

Fouriertransformation

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ ist

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathscr{F}f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Umkehrformel: Ist f stetig und $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(t)|\,dt < \infty$, dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathscr{F}f(\omega)\,d\omega.$$

$$\begin{array}{rcll}
\overline{f}(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \overline{\mathscr{F}f}(-\omega) & \\
f(-t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathscr{F}f(-\omega) & \\
f(at) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{1}{|a|}\mathscr{F}f(\omega/a), & a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
\frac{1}{|a|}f(t/a) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathscr{F}f(a\omega), & a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
f(t-a) & \circ\!\!-\!\!\bullet & e^{-i\omega a}\mathscr{F}f(\omega), & a \in \mathbb{R} \\
f^{(n)}(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (i\omega)^n\mathscr{F}f(\omega), & n \in \mathbb{N} \\
(-it)^n f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & (\mathscr{F}f)^{(n)}(\omega), & n \in \mathbb{N} \\
f * g(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \mathscr{F}f(\omega)\cdot\mathscr{F}g(\omega), & g : \mathbb{R}\to\mathbb{C} \text{ mit } \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt < \infty \\
f \text{ gerade} & \Longleftrightarrow & \mathscr{F}f \text{ gerade} & \\
f \text{ ungerade} & \Longleftrightarrow & \mathscr{F}f \text{ ungerade} &
\end{array}$$

Lemma von Riemann-Lebesgue: Im Fall $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ gilt

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \mathscr{F}f(\omega) = 0\,.$$

Satz von Plancherel: Ist $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\omega)|^2\,d\omega\,.$$

Potenzreihen

$$\begin{array}{rcll}
(x+y)^n & = & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = x^n + nx^{n-1}y + \ldots + nxy^{n-1} + y^n, & x,y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \\
\sin(z) & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, & z \in \mathbb{C} \\
\cos(z) & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, & z \in \mathbb{C} \\
e^z & = & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots, & z \in \mathbb{C} \\
\ln(x) & = & \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots, & x \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < x < 2 \\
\frac{1}{1-z} & = & \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots, & z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1 \\
\arctan(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots, & x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1 \\
\sinh(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, & x \in \mathbb{R} \\
\cosh(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, & x \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Integration

Partielle Integration: Sind die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt\,.$$

Substitutionsregel: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(\tau))g'(\tau)\,d\tau\,.$$