Lineare Algebra

Eigenraum: $E_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$.
geometrische Vielfachheit von λ: $\dim E_A(\lambda)$.
algebraische Vielfachheit von λ: Vielfachheit von λ als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms p_A.
Ähnliche Matrizen: $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen ähnlich $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $B = S^{-1}AS$.
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar** $\Leftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \Leftrightarrow$ Alg. und geom. Vielfachheit der Eigenwerte stimmt überein

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch** $\Leftrightarrow A = A^T$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch (oder selbstadjungiert)** $\Leftrightarrow A = A^* = \bar{A}^T \Rightarrow A$ diagonalisierbar, Eigenwerte reell, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal

A ist **orthogonal** $\Leftrightarrow A^TA = I$

A ist **unitär** $\Leftrightarrow A^*A = I$

A orthogonal bzw. unitär $\Leftrightarrow$ Zeilen bzw. Spalten bilden Orthonormalbasis

Gram-Schmidt: Seien $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren $b_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ und für $n = 2, ..., N$ $c_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, w_n\rangle\, b_i, b_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}$. Dann bilden $b_1, \dots b_N$ ein Orthonormalsystem und $\mathrm{lin}\{b_1, ..., b_N\} = \mathrm{lin}\{w_1, ..., w_N\}$
Definitheit von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $A = A^T$

$$A \text{ ist } \left\{\begin{matrix} \text{positiv} & \left[\begin{matrix} \\ \text{semi}\end{matrix}\right] & \text{definit} \\ \text{negativ} & \left[\begin{matrix} \\ \text{semi}\end{matrix}\right] & \text{definit}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon\ x^TAx \left\{\begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix}\right\} 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \text{ EW von } A\colon\ \lambda \left\{\begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix}\right\} 0$$

Ansonsten ist A indefinit. **Kriterium von Hurwitz:** Ist $A = A^T = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{vmatrix} > 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots, n$$

Ableitungen

Richtungsableitung: $f : D \to \mathbb{R}^n$ in $x_0 \in D$ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

Partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(x)$

Differenzierbarkeit: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. f heißt <u>differenzierbar</u> in $x_0 \in D$, falls $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Bezeichnung: $f'(x_0) := A$.

Kriterium: Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in x_0, so ist f in x_0 differenzierbar.

Gradient: $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \implies \mathrm{grad}\, f(x_0)$ steht senkrecht auf der <u>Niveaulinie</u> $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$.
Kettenregel: $\underbrace{(g \circ f)'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^{p\times n}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\in\mathbb{R}^{p\times m}} \underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$.

Satz über implizit definierte Funktionen: Sei $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$. Um $f(x, y) = 0$ bzgl. y zu lösen nahe bei (x_0, y_0). Bedingung: $f(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar. Es gilt für die Lösung $y(x)$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Satz für Richtungsableitung: f differenzierbar in $x_0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
$f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Matrix der Ableitung: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0)\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Hesse Matrix $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in D$

$$H_f(x_0) \coloneqq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right)_{j,k=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Taylorformel $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0, h \in \mathbb{R}^n$, $S[x_0, x_0 + h] \subset D \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ex. $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot \operatorname{grad} f(x_0) + \frac{1}{2}(H_f(\xi)h) \cdot h.$$

Fourierreihen

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar, dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp[-ikt]dt$ der k-te Fourierkoeffizient von f.
Es gilt der Zusammenhang zu den reellen Fourierkoeffizienten

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt,$$
$$b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt.$$

Es gilt

$$\sum_{|k|<n} c_k(f)\exp[ikt] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f)\sin(kt).$$

Optimierung

Satz über lokale Extremstellen: Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $x_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

$$H_f(x_0) \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{bmatrix} \text{definit} \\ \text{indefinit} \end{matrix} \right\} \implies f \text{ hat in } x_0 \left\{ \begin{matrix} \text{ein lokales} \begin{bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{bmatrix} \\ \text{einen Sattelpunkt} \end{matrix} \right\}$$

Multiplikatorenregel von Lagrange Sei $p < n$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $N = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$. Hat f in $x_0 \in D$ lok. Extremum unter Nebenbedingung $h = 0$ und $\operatorname{rang} h'(x_0) = p$, dann existiert $\lambda^0 \in \mathbb{R}^p$ mit $\operatorname{grad} L(x_0, \lambda^0) = 0$, wobei $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$.

Integralsätze

Rotation, Divergenz: $v = (v_1 ... v_n)^T$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$$\operatorname{div} v := \nabla \cdot v := \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$$

$$n = 3: \qquad \operatorname{rot} v := \nabla \times v := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Laplace: $f(x_1, .., x_n)$ Skalarfeld: $\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f$. **Rechenregeln:** $f, g, v \in C^1$

$$\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$\nabla \cdot (fv) = f \ (\nabla \cdot v) + (\nabla f) \cdot v$$

$$\nabla \times (fv) = f \ (\nabla \times v) + (\nabla f) \times v \quad (n = 3)$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f) g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f \ \Delta g \quad (f, g \in C^2).$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \quad f \in C^2$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0, \quad v \in C^2.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f, \quad f \in C^2.$$

Kurvenintegrale von Skalarfeldern

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Bogenlänge von Raumkurven

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad s(x) := \int_a^x \|\gamma'(t)\| \ dt$$

$L(\gamma) := s(b)$ Bogenlänge, $\gamma_0 = \gamma \circ s^{-1}$ natürliche Parametrisierung.

Kurvenintegrale von Vektorfeldern

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma v \cdot ds := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

Kurvenintegral Gradientfelder

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma \operatorname{grad} f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Verträglichkeitsbedingung: Sei $v = (v_1, ..., v_n)$ C^1 Vektorfeld. Dann v Potentialfeld $\implies \partial_j v_k = \partial_k v_j$, $\forall j, k = 1, ..., n$. Ist Definitionsmenge von v einfach zusammenhängend so gilt die umgekehrte Richtung.

Integralsatz von Gauß in $\mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma v \cdot \ ds = \int_{\overline{G}} (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) \ d(x, y),$$

wobei G 'links' von γ liegt und G einfach zusammenhängend.

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$ (N: äußerer Normaleneinheitsvektor, G und γ wie bei Gauß mit nat. Param.)

$$\int_\gamma w \cdot N \, ds = \int_{\overline{G}} \operatorname{div} w \, d(x, y)$$

Parameterdarstellung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$$

Integralsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

$$\int_\Gamma v \cdot \ ds = \int_{\mathcal{F}_0} \operatorname{rot} v \cdot \ do,$$

wobei G und γ wie bei Gauß, g Parameterdarstellung,$\Gamma = g \circ \gamma$, $\mathcal{F}_0 = g(\overline{G})$.

Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$

$$\int_\mathcal{F} do = \int_U |\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)| \ d(u, v).$$

Normaleneinheitsvektor: $(u, v) \in U$

$$N(g(u, v)) = \pm \frac{\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)}{|\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)|}$$

Oberflächenintegrale von $\mathcal{F} = \{g(u, v) \colon (u, v) \in U\}$

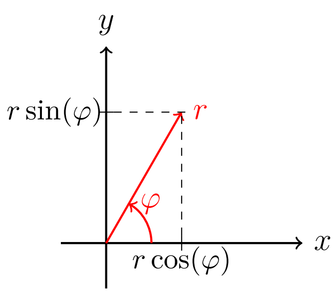
$$\int_\mathcal{F} f \underbrace{do}_{do := |\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)| \, d(u,v)} := \int_U f(g(u, v)) \ |\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)| \ d(u, v)$$

$$\int_\mathcal{F} w \cdot \underbrace{do}_{do := (\partial_u g(u,v) \times \partial_v g(u,v)) \, d(u,v)} := \int_U w(g(u, v)) \cdot (\partial_u g(u, v) \times \partial_v g(u, v)) \ d(u, v)$$

Koordinatentransformationen

Transformationsformel $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, $g : B \mapsto A$ surjektiv, injektiv auf B° und $\det g' \neq 0$ auf B° dann $\int_A f(x)\,dx = \int_B f(g(y))|\det(g'(y))|\,dy$.

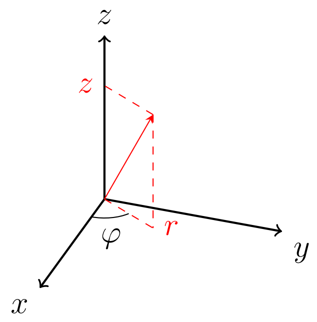
Polarkoordinaten



$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi) = r$$

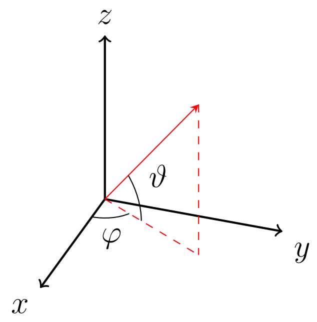
Zylinderkoordinaten



$$g(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi,z) = r$$

Kugelkoordinaten



$$g(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det g'(r,\varphi,\vartheta) = r^2\cos\vartheta$$

Funktionentheorie

Cauchyscher Integralsatz: f holomorph, G offen und einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel: f holomorph, G offen und einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen und positiv orientiert, z_0 im Inneren von γ

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Folgerung: holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(k+1)}}\,dz$$

Satz von Liouville: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.
Identitätssatz: G Gebiet, f und g holomorph auf G, $M = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ habe einen HP in G $\Rightarrow f = g$ auf G.
Residuensatz: G einfach zusammenhängend, γ einfach geschlossen und positiv orientiert, $z_0, ..., z_n$ im Innern von γ, $f : G \setminus \{z_0, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}(f; z_j)$$

Berechnung von Residuen

- hebbare Singularität: $\operatorname{res}(f; z_0) = 0$
- f hat in z_0 Pol n-ter Ordnung

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z - z_0)^n f(z)\right)\right]\Big|_{z=z_0}$$

Allgemeines

Arkusfunktionen:

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \quad \arctan\colon \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \tfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

partielle Integration: $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$
Substitution: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

$g(x)$	$\int g(x)dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$