

1 Integralrechnung

1.1 Kurvenintegrale

1.1.1 nicht orientierte: Funktionen

1. Parametrisierung: Funktion \rightarrow Vektor $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$
2. Betrag der Ableitung der parametrisierten Funktion bestimmen und das Integral des Skalarproduktes lösen.

$$\int_C f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{\phi}(t)) \cdot |\vec{\phi}_t(t)| dt$$

3. Sonderfall: *Kurvenlänge* $L = \int_a^b |\vec{\phi}_t(t)| dt$

1.1.2 orientierte: Vektoren

1. Parametrisierung der Kurve: $C = \{ \vec{r} | \vec{r}' = \vec{\phi}(t) \}$
2. Ableitung der parametrisierten Kurve bestimmen und das Integral des Skalarproduktes lösen.

$$\int_C \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}(\phi(t)) \cdot |\vec{\phi}_t(t)| dt$$

3. Sonderfall: das Integral ist in der Form $\int_C P dx + Q dy$ gegeben. Dann kann $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = \vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ direkt eingesetzt werden

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) \cdot \dot{x} + Q(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}] dt \text{ (analog im } \mathbb{R}^3 \text{)}$$

1.1.3 Umwandlung orientiert \leftrightarrow nicht orientiert

1. orientiert \rightarrow nicht orientiert
 $\int_C \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_C (\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{t}_0) dt$
2. nicht orientiert \rightarrow orientiert
 $\int_C f(\vec{r}) ds = \int_C (f(\vec{r}) \cdot \vec{t}_0) d\vec{r} = \int_C (f(\vec{r}) \cdot \vec{n}_0) d\vec{n}$
wobei für den Tangentenvektor gilt: $\vec{t}_0 = \frac{\vec{\phi}_t(t)}{|\vec{\phi}_t(t)|}$

1.2 Flächenintegrale

1.2.1 nicht orientierte: Funktionen

1. Parametrisierung der Fläche: $F = \{ \vec{r} | \vec{r} = \vec{\phi}(s, t) \}$
2. Betrag des Kreuzproduktes der Ableitungen der parametrisierten Funktion bestimmen und das Integral des Skalarproduktes lösen.

$$\int_F f(\vec{r}) do = \iint_G f(\phi(s, t)) \cdot |\vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t| ds dt$$

3. Sonderfall: *Oberfläche* $O = \iint_G |\vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t| ds dt$

1.2.2 orientierte: Flussintegral

1. Parametrisierung der Fläche: $F = \{ \vec{r} | \vec{r} = \vec{\phi}(s, t) \}$
2. Ableitung der parametrisierten Kurve bestimmen und das Integral des Skalarproduktes lösen.

$$\int_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{\sigma} = \iint_G \vec{v}(\phi(s, t)) \cdot |\vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t| ds dt \quad \text{oder mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$
$$\iint_G \left(P \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ z_s & z_t \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{vmatrix} \right) ds dt$$

1.2.3 Umwandlung orientiert \leftrightarrow nicht orientiert

1. orientiert \rightarrow nicht orientiert

$$\int_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{\sigma} = \int_F (\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_0) do$$

2. nicht orientiert \rightarrow orientiert

$$\int_F f(\vec{r}) do = \int_F (f(\vec{r}) \cdot \vec{n}_0) d\vec{\sigma}$$

wobei für den Normalenvektor gilt: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t}{|\vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t|}$

1.3 Flussintegrale

1.3.1 Fluss längs einer Kurve

Die Kurve C ist durch $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben, dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Für den Fluss ergibt sich dann:

$$\int_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} d\vec{n} = \int_C \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix} d\vec{r} = \int_C (-Q dx + P dy)$$
$$\int_C (P dx + Q dy) = \int_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} d\vec{r} = \int_C \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} d\vec{n}$$

1.3.2 Fluss durch eine Fläche

Die Fläche F ist durch $\vec{\phi}(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix}$ gegeben, dann ist $\vec{n} = \vec{\phi}_s \times \vec{\phi}_t$. Für den Fluss gilt dann:

$$\int_F \vec{v}(\vec{r}) d\vec{\sigma} = \iint_F \vec{v}(\vec{\phi}(s, t)) \cdot \vec{n} ds dt$$

mit $do = d(s, t)$

1.4 Integralsätze

Vergrößert sich die Dimension bei der Anwendung eines Satzes, wird dabei vorausgesetzt, dass das Integrationsgebiet „geschlossen“ (Der Mathematiker geht nicht mit der Zeit!) ist bzw. es keinen Rand hat. Verringert sich die Dimension bei der Anwendung eines Satzes, muss eine Integrierbarkeitsbedingung an den Integranden gestellt werden. Trifft keine dieser Bedingungen zu, kann das Integral nur direkt ausgerechnet werden.

1.4.1 Integralsätze im \mathbb{R}^2

Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\int_C \text{grad } f(\vec{r}) d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

Ist $\int_C \text{grad } f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{C'} \text{grad } f(\vec{r}) d\vec{r}$ so ist das Integral wegunabhängig.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ Potential-/Gradientenfeld, d.h. es gibt ein Potential f mit $\vec{v} = \text{grad } f$, wenn die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ erfüllt ist und „C“ eine geschlossene Kurve ist $\int_C \vec{v} d\vec{r} = 0$.

Erster Satz von Gauß, Divergenzsatz

$$\int_C \vec{v}(\vec{r}) d\vec{n} = \int_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n} ds = \int_G \text{div } \vec{v} d(x, y)$$

wobei C eine Randkurve und somit geschlossen sein muss.

Zweiter Satz von Gauß oder Satz von Green

$$= \int_C P dx + Q dy = \int_G (Q_x - P_y) d(x, y)$$

wobei G ein Gebiet mit der äußeren Randkurve C und somit geschlossen sein muss.

Satz von Green, Greensche Formel Sei G ein Gebiet mit der äußeren Randkurve C, dann

$$= \int_C \left(g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} - h \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \right) = \int_G (g \Delta h - h \Delta g) d(x, y)$$

Dabei ist $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ und $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ die Richtungsableitung von g in Richtung \vec{n} , also $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \text{grad } g \cdot \vec{n}$.

Es gilt also für den Fluss des Vektorfeldes $\text{grad } g$ durch die Kurve C:

$$\int_C g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} ds = \int_C \text{grad } g d\vec{n}$$

1.4.2 Integralsätze im \mathbb{R}^3

Die Sätze im \mathbb{R}^2 gelten analog auch für \mathbb{R}^3 . Der Unterschied besteht darin, dass man alle Formeln auf drei Koordinaten beziehen muss. Die entsprechenden Bedingungen stehen im GR auf Seite 198.

Satz von Stokes

$$\int_F \text{rot } \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_C \vec{v} d\vec{\sigma}$$

- $\int_F \vec{w} d\vec{\sigma}$ läßt sich umschreiben zu $\int_F \text{rot } \vec{v} d\vec{\sigma}$, falls $\text{div } \vec{w} = 0$
- Ist \vec{v} Potentialfeld (also $\vec{v} = \text{grad } f$), dann ist $\text{rot } \vec{v} = 0$
- Ist F' eine Kurve mit derselben Randkurve C, so ist $\int_{F'} \text{rot } \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_F \text{rot } \vec{v} d\vec{\sigma}$. Dies ist analog zur Wegunabhängigkeit von Integralen von Potentialfeldern.
- Liegt die Fläche ganz in der x,y-Ebene und zeigt der Normalenvektor in Richtung der positiven x-Achse, geht der Satz von Stokes in den zweiten Satz von Gauß über.

1.5 Potentialfeld

Ein Vektorfeld \vec{f} heißt

konservativ, falls das Kurvenintegral $\int_K \vec{f} d\vec{x}$ wegunabhängig ist, bzw. die Kurvenintegrale $\oint \vec{f} d\vec{x}$ über geschlossene Wege 0 sind.

Potential- oder Gradientenfeld, falls es eine reellwertige Funktion Φ gibt, für die gilt: $\text{grad } \Phi = \vec{f}$

Ein Feld ist konservativ genau dann, wenn es Potentialfeld ist! In einfach zusammenhängenden Gebieten ist diese Aussage äquivalent zu: \vec{f} ist wirbelfrei.

Ist Φ Potentialfunktion von \vec{f} , so gilt:

$$\int_K \vec{f} d\vec{x} = \Phi(\vec{x}(a)) - \Phi(\vec{x}(b)) \quad (\text{Potentialdifferenz})$$

Eine **notwendige(!)** Bedingung, für ein Vektorfeld $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ Potentialfeld zu sein ist die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$$

Die hinreichende Bedingung ergibt sich aus oben genannten Bedingungen:

$$\text{rot } \vec{f} = \oint \vec{f} d\vec{x} = \vec{0}$$

Rechenregeln für grad , rot , div , ∇ sind auf den Seiten GR 130 und Rep. 527 zu finden.

1.6 Transformationsformel

Funktionen müssen bei der Integration stets derart parametrisiert werden, das sich das Integral folgendermaßen definieren lässt:

$$\int_G f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{x=a}^b \int_{y=g(x)}^{h(x)} \int_{z=j(x,y)}^{k(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Dabei ist ersichtlich, das $y(x)$ nur von einer Variablen abhängt und $z(x, y)$ von zwei.

Bei der Verwendung neuer Koordinatensysteme verwendet man den Transformationssatz

$$\int_G f(\vec{r}) d(x, y, z) = \int_{G'} f(\vec{\phi}(\vec{p})) \left| \det \vec{\phi}' \right| d(u, v, w)$$

Man kann bei der Berechnung der Determinante der Jacobimatrix diese Konsequenz der Umkehrformel verwenden:

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) = \det \left(\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1}$$

Man sollte die beiden folgenden Determinanten kennen:

Kugelkoordinaten: $\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right) = \rho^2 \sin^2 \theta$ (oder $\rho^2 \cos^2 \theta$)

Zylinderkoordinaten: $\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) = r$

2 Differenzialrechnung

2.1 Stetigkeit

Funktionen sind stetig, wenn sie sich aus stetigen Funktionen zusammensetzen. Soll Stetigkeit in einem Punkt (x_0, y_0) gezeigt werden, so gilt es, den Grenzwert zu berechnen.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y_0)|$$

Ist dies nicht möglich, muss die getrennte Stetigkeit gezeigt werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$$

In beiden Fällen muss der Grenzwert den Wert der gegebenen Funktion annehmen.

Standardtrick 1: Bei Nullpunktbetrachtung Polarkoordinaten verwenden (auch bei Differenzierbarkeit), da hierbei eine zusammengesetzte Funktion entsteht $f(x, y) \rightarrow f(r, \phi) = R(r) \cdot \Phi(\phi)$. Dabei entsteht eine beschränkte Funktion $\Phi(\phi)$ und der Grenzwert von $R(r) \rightarrow 0$.

Standardtrick 2: Bei dem Verdacht auf Unstetigkeit im Nullpunkt versucht man eine Nullfolge (x_n, y_n) anzugeben, für die die Funktionswerte nicht gegen $f(0,0)$ gehen. Steht im Nenner eine Summe, versucht man durch geschickte Wahl die Potenzen gleich zu machen, z.B. mit $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Da die Funktionswerte nicht gegen $f(0,0)$ konvergieren, ist f im Nullpunkt unstetig.

2.2 Differenzierbarkeit

Prinzipiell folgt aus Differenzierbarkeit Stetigkeit. Eine Funktion ist stetig differenzierbar, wenn ihre partiellen Ableitungen stetig sind. Bei partiell differenzierbare Funktionen schreibt man für die Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f = f_{x_i}$$

Eine Funktion ist total differenzierbar in \vec{a} mit der Ableitung $Df(\vec{a})$, falls es einen (Zeilen-) Vektor Df gibt, so dass gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} [f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - Df \cdot (\vec{x} - \vec{a})] = 0$$

Ist f differenzierbar, so ist

$$f' = Df = \text{grad } f$$

Liegt eine vektorwertige Funktion vor, so ist diese partiell differenzierbar, wenn ihre Komponenten es sind. Die partielle Ableitung ist dann der Vektor aus den Ableitungen der Komponenten. Eine vektorwertige Funktion ist total differenzierbar in \vec{a} mit der Ableitung $\vec{f}'(\vec{a}) = D\vec{f}(\vec{a})$, falls es eine Matrix $D\vec{f}$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} [\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - D\vec{f} \cdot (\vec{x} - \vec{a})] = 0$$

Die Matrix heißt Funktional- oder Jacobimatrix

$$\vec{f}' = D\vec{f} = J\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

2.3 Richtungsableitungen

Für die Richtungsableitung von f in Richtung \vec{v} im Punkt \vec{a} gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) := D_{\vec{v}}f(\vec{a}) := \left. \frac{d}{dt}f(\vec{a} + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$$

Ist f in \vec{a} differenzierbar, gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

In der Regel werden die Richtungsableitungen mit normiertem Vektor \vec{v} vorgenommen.

2.4 Implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen sagt aus, dass ein Gleichungssystem bei \vec{a} lokal auflösbar ist nach y_1 bis y_n . Dazu geht man folgendermaßen vor:

1. Bedingungen zu einem Gleichungssystem der Form $f(x, y_1(x), y_n(x)) = 0$ zusammenfassen.

2. Voraussetzungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ einsetzen und überprüfen, ob das Gleichungssystem $f(\vec{a}) = 0$ erfüllt ist.

3. Jacobideterminante bilden (die stets vom Typ $n \times n$ ist). Ist diese regulär ($\det = 0$), dann werden y_1 bis y_n implizit definiert.

$$\det f_{\vec{y}}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\vec{a}) \end{vmatrix} \neq 0$$

Ist $\det = 0$, so ist der Satz nicht anwendbar. Eine Lösung kann dann durch Umstellen nach einer Funktion y_i und anschließendem Raten herbeizuführen sein.

4. Die Auflösungen y_1 bis y_n sind nach \vec{x} differenzierbar und es gilt: $\vec{y}_{\vec{x}} = -(f_{\vec{y}})^{-1} f_{\vec{x}}$

Um die Ableitungen einer impliziten Funktion zu bilden, werden die Voraussetzungen $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_n'(x_0) \end{pmatrix}$ in die Ableitung nach der gesuchten Variable der Matrix f eingesetzt. Analog wird bei höheren Ableitungen verfahren, wobei die erhaltenen Werte für die niedrigeren Ableitungen eingesetzt werden.

Standardtrick: Ist eine Funktion $f(x, y, z)$ in der Nähe eines Punktes P nach $z(x, y)$ auflösbar, können die die Ableitungen dieser indirekt gebildet werden.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} / \frac{df}{dz}$$

2.5 Extremwerte differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwertes ist:

$$\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$$

Die hinreichende Bedingung liefert eine Untersuchung der Hessematrix, die stets symmetrisch ist.

$$\vec{f}'' = H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium müssen dann die Determinanten der Matrix untersucht werden. Aus einer allgemeinen Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

folgt dann mit den Determinanten:

$$D_1 = a_{11}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; D_4 = \dots$$

- $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0, D_4 > 0, \dots \rightarrow$ positiv definit \Rightarrow Minimum
- $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0, \dots \rightarrow$ negativ definit \Rightarrow Maximum
- $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, D_3 \geq 0, D_4 \geq 0, \dots \rightarrow$ positiv semidefinit \Rightarrow Minimum oder Sattelpunkt
- $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, D_4 \geq 0, \dots \rightarrow$ negativ semidefinit \Rightarrow Maximum oder Sattelpunkt
- weder definit noch semidefinit \rightarrow indefinit \Rightarrow Sattelpunkt
- $D_i = 0 \Rightarrow$ keine Aussage über Art des Extrempunktes

2.5.1 Höhenlinienmethoden

Unter eine Höhenlinie versteht man einen konstanten Funktionswert einer mehrdimensionalen Funktion. $f(x_1, \dots, x_n) = c$ Außerdem ist $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ einer Höhenlinie Normalenvektor auf ihr. Bei der Höhenliniennethode zur Untersuchen des Extremwertes einer Funktion am kritischen Punkt \vec{a} geht man folgendermaßen vor:

1. Untersuche das Vorzeichen $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$ in einer Umgebung von \vec{a} . (Faktorisierung nach Vorzeichen sinnvoll!)
2. Ist der Ausdruck stets positiv (negativ), liegt ein Minimum (Maximum) vor. Hat der Ausdruck in jeder Umgebung verschiedene Vorzeichen, hat man einen Sattelpunkt.
3. Wenn der Ausdruck in der Nähe von \vec{a} keine weiteren Nullstellen hat, hat man ein striktes Extremum.

2.5.2 Extremwerte mit Nebenbedingungen

Ist eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen g_k zu untersuchen, können zwei Methoden angewandt werden. Entweder können die Nebenbedingungen in f eingesetzt werden. Dann geht man weiter vor, wie oben, wobei der z-Wert des Extremums aus den Nebenbedingungen bestimmt werden kann. Oder man geht nach der *Standardmethode* vor:

1. Überprüfung der Rangbedingung: Punkte, für die gleichzeitig

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{grad } g_1 \\ \vdots \\ \text{grad } g_k \end{pmatrix} < k \text{ und } g_1 = 0, \dots, g_k = 0$$

gilt, erfüllen die Rangbedingung nicht und kommen als Extrema in Frage (keine Randwerte).

2. Bilden der Hilfsfunktion $h(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_k g_k$. Mögliche Extrema sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\text{grad } h = \vec{0}, g_1 = 0, \dots, g_k = 0$$

- Die erhaltenen Punkte müssen die Regularitätsbedingung $rg(\text{grad } \vec{g}) = k$ erfüllen!
- Zur Feststellung der Art des Extremums wird wie oben beschrieben verfahren. Sattelpunkte können nur mit Hilfe des Verfahrens aus GR Seite 110 nachgewiesen werden.

Sonderfall: $k = n - 1$, Determinantenbedingung: Hat man eine Bedingung weniger als Variablen, findet man alle Kandidaten für Extrema als Lösungen von

$$\det \begin{pmatrix} \text{grad } f \\ \text{grad } g_1 \\ \vdots \\ \text{grad } g_{n-1} \end{pmatrix} = 0,$$

die gleichzeitig die Nebenbedingungen $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$ bis $g_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ erfüllen. Das ergibt n Gleichungen für n Unbekannte.

3 Differentialgleichungen

3.1 Lineare DGL 1. Ordnung

Eine DGL der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ nennt man DGL mit getrennten Variablen. Lösungen erhält man mit der Methode „Separation der Variablen“.

$$y' = \frac{dx}{dy} = y' = f(x) \cdot g(y) \implies \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Die lineare DGL 1. Ordnung $y' + a(x)y = r(x)$ besitzt die Gesamtlösung $y = y_h + y_p$, wobei y_h die Gesamtlösung der homogenen DGL $y' + a(x)y = 0$ und $y' + a(x)y = 0$ die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y' + a(x)y = r(x)$ sind.

- Berechnung von y_h
 - Raten einer Lösung $y_1 \neq 0$
 - $y_h = ce^{-A(x)}$, $A(x) = \int a(x) dx$ oder
 - Berechnung einer Lösung y_1 mittels Separation der Variablen

Stets hat y_h die Form $c \cdot y_1$.

- Berechnung von y_p
 - Raten einer Lösung
 - $y_p = e^{-A(x)} \cdot \int r(x)e^{A(x)} dx$
 - Berechnung mittels Variation der Konstanten: Der Ansatz $y_p(x) = c(x) \cdot y_h(x)$ führt auf $c' = r(x)e^{A(x)}$.

Um eine Anfangswertaufgabe zu lösen, wird die Integrationkonstante c durch Einsetzen der Anfangsbedingungen x_0, y_0 angepasst.

3.1.1 Bernoulli

Typ: $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$

Substitution: $y = y^{1-\alpha}$ mit $u' = (1-\alpha) \cdot f(x) \cdot u + (1-\alpha) \cdot g(x)$

3.1.2 Riccati

Typ: $y' = f(x)y + g(x)y^2 + h(x)$

Zunächst muss eine Lösung für y geraten werden, bei der $h(x)$ wegfällt. Diese Lösung ist z .

Substitution: Jede andere Lösung hat die Form $y = z + \frac{1}{u}$ mit $u' = -(2zg + f)u - g$

3.2 Getrennte Veränderliche

3.2.1 Typ I (getrennte Veränderliche)

Typ: $y' = f(x)g(y)$

Es gibt drei Arten von Lösungen.

1. Ist $g(C) = 0$ (Wann ist $y' = 0?$), so ist $y \equiv C$ eine konstante Lösung.
2. Separation der Variablen: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$
3. Mögliche Lösungen, die sich aus 1. und 2. zusammensetzen. Das kann nur an Stellen passieren, an denen $g(y)$ nicht stetig nach y differenzierbar ist.

Oft lassen sich Lösungen nur **implizit** angeben!

Bei Anfangswertproblemen (AWP)

1. Ist $g(y_0) = 0$, so ist $y \equiv y_0$ eine konstante Lösung. Weitere Lösungen, wenn die Bedingung aus 3. nicht erfüllt ist.
2. Separation der Variablen: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$ und x_0, y_0 einsetzen

3.2.2 Typ II (Ähnlichkeits-DGL)

Typ: $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Substitution: $y = ux \Leftrightarrow u = \frac{y}{x}$ mit $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ (als Typ I lösen)

Bei AWP lässt sich $y(x_0) = y_0$ zu $u(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ transformieren.

3.2.3 Typ III

Typ: $y' = f(ax + by + c)$

Substitution: $u = ax + by + c \Leftrightarrow y = \frac{u - ax - c}{b}$ mit $u' = a + bf(u)$ (als Typ I lösen)

Bei AWP lässt sich $y(x_0) = y_0$ zu $u(x_0) = ax_0 + by_0 + c$ transformieren.

3.2.4 Typ IV

Typ: $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$

Ist $\det \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$ lässt sich die DGL auf Typ II oder III zurückführen

Die *eindeutige* Lösung (x_0, y_0) des Gleichungssystems $\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{matrix}$ bestimmen

Substitution: $u = y - y_0, t = x - x_0, y' = u'$ und den Bruch durch t kürzen, so dass eine DGL der Form $u' = \tilde{f}\left(\frac{x}{y}\right)$ entsteht. (als Typ II lösen)

Ein Anfangswert $y(\hat{x}) = \hat{y}$ ergibt $t_0 = \hat{x} - x_0$ und $u_0 = u(t_0) = \hat{y} - y_0$.

3.3 Exakte DGL

Typ: $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ oder $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$

1. Ist $P_y = Q_x$? Falls nicht: Bestimmung des Eulerschen Multiplikators $\mu(x, y)$, so dass $\mu P dx + \mu Q dy = 0$
2. Bestimmen einer Stammfunktion $F(x, y)$
3. Bestimmen der Lösungen aus $F(x, y) = C$. Falls ein Multiplikator benutzt wurde: Test, ob sich die Lösungsmenge verändert hat.
4. AWP mit $y(x_0) = y_0$ so ist $F(x_0, y_0) = C$