

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik Sommersemester 2023

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

16 Skalarprodukt und Orthogonalität

Wir setzen hier die Lineare Algebra aus der Vorlesung HMI fort, der Anfang ist Wiederholung. Wie in HMI schreiben wir wieder \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

16.1. Skalarprodukte: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

$$(S1) \quad \forall x, y \in V: (x|y) = \overline{(y|x)},$$

$$(S2) \quad \forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{K}: (\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z),$$

$$(S3) \quad \forall x \in V \setminus \{0\}: (x|x) > 0.$$

heißt ein *Skalarprodukt auf V* .

Eigenschaften eines Skalarproduktes auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V sind

$$\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{K}: (x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z),$$

$$\forall x \in V: (x|0) = (0|x) = 0,$$

$$\forall x, y \in V: |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} \text{ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)}.$$

Zum Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $y \neq 0$ schreibe man

$$0 \leq (x - \alpha y|x - \alpha y) = (x|x) - \alpha(y|x) - \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha|^2(y|y) = (x|x) - \frac{|(x|y)|^2}{(y|y)},$$

wobei $\alpha = (x|y)/(y|y)$. Wegen (S3) gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung nur, wenn $x = \alpha y$, dh also nur dann, wenn x, y linear abhängig sind.

Bemerkung: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und also V ein \mathbb{R} -Vektorraum, so kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden, da $\bar{r} = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Beispiele: (1) Das *gewöhnliche Skalarprodukt* auf dem \mathbb{K}^n (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt es auch *euklidisch*) ist gegeben durch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Für das Skalarprodukt von $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ schreibt man häufig auch $\vec{x} \cdot \vec{y}$ (und gelegentlich sogar nur $\vec{x}\vec{y}$).

(2) Sind $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, so definiert auch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^n a_j x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n : (S1) und (S2) sind leicht, für (S3) beachte man, dass

$$(\vec{x}|\vec{x}) = \sum_{j=1}^n a_j |x_j|^2 \geq 0$$

wegen $a_j > 0$ nur dann $= 0$ ist, wenn alle $x_j = 0$ sind.

(2') Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar und $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt. Dann definiert

$$((\vec{x}|\vec{y})) := (A\vec{x}|A\vec{y})$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n . Auch hier sind (S1) und (S2) leicht. Für (S3) benötigt man die Invertierbarkeit von A .

(3) Durch Grenzübergang von (1) erhält man: Sei $l^2(\mathbb{N})$ der Raum der quadratsummierbaren Folgen in \mathbb{K} , also

$$l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Dann ist $l^2(\mathbb{N})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und durch

$$(x|y) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j, \quad x, y \in l^2(\mathbb{N}),$$

wird ein Skalarprodukt auf $l^2(\mathbb{N})$ definiert. Dabei ist die Reihe im Skalarprodukt absolut konvergent: Zunächst gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ nach Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |x_j \bar{y}_j| &= \sum_{j=1}^N |x_j| |y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N |y_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 \right)^{1/2} =: M < \infty, \end{aligned}$$

und $N \rightarrow \infty$ impliziert absolute Konvergenz. Weiter haben wir für $x, y \in l^2(\mathbb{N})$:

$$\sum_{j=1}^N |x_j + y_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^N (x_j \bar{y}_j + \bar{x}_j y_j)}_{\leq 2M},$$

was für $N \rightarrow \infty$ impliziert, dass $x + y \in l^2(\mathbb{N})$ gilt. Nun sind die Eigenschaften leicht nachzuweisen.

Entsprechendes gilt, wenn man statt \mathbb{N} als Indexmenge \mathbb{Z} nimmt und

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$$

betrachtet.

16.2. Normen: Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, so hat die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$, $v \mapsto \sqrt{(v|v)}$ folgende Eigenschaften:

$$(N1) \quad \forall v \in V: \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0,$$

$$(N2) \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{K}: \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|,$$

$$(N3) \quad \forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

Beweis der Dreiecksungleichung. Es gilt (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

$$\|u + v\|^2 = (u + v|u + v) = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|u|v| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2,$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen. \square

Definition: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ mit den Eigenschaften (N1)–(N3) heißt eine *Norm auf V* .

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , so wird für $u, v \in V$ die Zahl $\|u - v\| \geq 0$ als **Abstand** von u und v interpretiert, und es gilt $\|0\| = 0$, sowie

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\| \quad (\text{umgekehrte Dreiecksungleichung}).$$

Beobachtung: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Dann gilt für alle $u, v \in V$ die sogenannte *Parallelogrammgleichung*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Beispiele: (1) Ist M eine Menge mit mindestens zwei Punkten, so wird auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $B(M)$ aller beschränkten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(m)| : m \in M\}$$

eine Norm definiert. Zu dieser Norm gibt es kein Skalarprodukt.

(2) Durch $\|(x_1, x_2)\|_1 := |x_1| + |x_2|$ wird auf dem \mathbb{R}^2 eine Norm definiert, zu der es kein Skalarprodukt gibt.

Ende Mo
17.04.23

Bemerkung: Durch eine Norm hat man also einen *Abstandsbegriff* auf einem Vektorraum. Durch ein Skalarprodukt hat man aber außerdem noch die Möglichkeit, *Winkel* zu betrachten:

Sind z.B. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, so ist

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos \varphi,$$

wobei φ den von \vec{x}, \vec{y} eingeschlossenen **Winkel** bezeichne. Da das Skalarprodukt in jeder Komponente linear ist, muss man das nur für $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$ einsehen. Am besten geht das für $n = 2$ und etwa $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{y} = (y_1, y_2)$. Dann ist

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{e}_1|\vec{y}) = y_1.$$

16.3. Orthogonalität: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt. Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ heißen *orthogonal*, falls für alle $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $j \neq k$ gilt $(v_j|v_k) = 0$. Statt $(v|w) = 0$ schreibt man auch $v \perp w$.

Die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_m heißen *orthonormal* oder ein *Orthonormalsystem* (ONS), falls für alle j, k gilt: $(v_j|v_k) = \delta_{jk}$, dh also falls die Vektoren orthogonal sind und zusätzlich alle Norm 1 haben.

Ist V endlich-dimensional, so ist eine *Orthonormalbasis* (ONB) von V eine Basis von V , die ein Orthonormalsystem ist.

Beispiel: Die Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ist eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n , denn es gilt $(\vec{e}_j|\vec{e}_k) = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 1, \dots, n$.

Satz: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ orthogonal. Dann sind v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig.

Beweis. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Sei nun $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wir nehmen das Skalarprodukt der Gleichung mit v_k und erhalten

$$0 = (0|v_k) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n | v_k) = \alpha_k (v_k | v_k)$$

wegen der vorausgesetzten Orthogonalität. Wegen $v_k \neq 0$ ist auch $(v_k|v_k) \neq 0$, und wir erhalten $\alpha_k = 0$. Da k beliebig war, sind v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig. \square

Bemerkung: Ist v_1, v_2, \dots, v_m ein Orthonormalsystem in V und $v \in \text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, so lassen sich die Koordinaten von v bzgl. v_1, v_2, \dots, v_m leicht bestimmen. Es gilt nämlich

$$v = \sum_{j=1}^m (v|v_j) v_j.$$

Zum Beweis schreibt man $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$ und bildet das Skalarprodukt mit v_k , $k = 1, \dots, m$:

$$(v|v_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{(v_j|v_k)}_{=\delta_{jk}} = \alpha_k.$$

16.4. Das Gram-Schmidt-Verfahren: Gegeben sei ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ seien linear unabhängig. Wir werden ein Orthonormalsystem b_1, b_2, \dots, b_m konstruieren mit

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Falls v_1, v_2, \dots, v_m eine Basis von V ist, so ist b_1, b_2, \dots, b_m eine Orthonormalbasis von V . Die Vektoren b_1, \dots, b_m werden sukzessiv so konstruiert, dass gilt:

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m.$$

Wir setzen $b_1 := v_1/\|v_1\|$ und für $k = 2, \dots, m$:

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k|b_j) b_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|},$$

oder gleichbedeutend

$$c_1 := v_1, \quad c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k|c_j)}{(c_j|c_j)} c_j \quad \text{für } k = 2, \dots, m, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|} \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Beispiele: (1) Wir betrachten $n = 3$, $V = \mathbb{C}^3$ und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) \vec{v}_1, \vec{v}_2 wie eben, aber $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind \vec{b}_1, \vec{b}_2 wie eben, aber

$$\begin{aligned}\vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich dieses \vec{b}_3 von dem in Beispiel (1) nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Dies ist nicht erstaunlich, da es genau zwei Möglichkeiten gibt, \vec{b}_1, \vec{b}_2 zu einer Orthonormalbasis zu ergänzen.

Folgerung: Jeder endlichdimensionale Vektorraum V mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.

16.5. Transponierte und adjungierte Matrizen: Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{K}^{m \times n}$, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die *transponierte Matrix* zu A und wird mit A^T bezeichnet. Für alle $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ steht an der Stelle (k, j) in der Matrix A^T also der Eintrag a_{jk} , der in der Matrix A an der Stelle (j, k) steht. Setzen wir $B := A^T$ mit $B = (b_{kj})_{k=1, j=1}^m \in \mathbb{K}^{m \times n}$, so gilt also

$$b_{kj} = a_{jk}, \quad k \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt die Matrix $\in \mathbb{C}^{m \times n}$, für die an jeder Stelle (k, j) der Eintrag $\overline{a_{jk}}$ steht, die *adjungierte Matrix* zu A und wird mit A^* bezeichnet.

Bemerkung: Setzt man $\overline{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (konjugiert komplexe Matrix zu A), so gilt also

$$A^* = \overline{A^T} = (\overline{A})^T.$$

Schreibweisen des Skalarprodukts:

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{y}$.
 Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n \times 1}$ gilt $(\vec{x}|\vec{y}) = \vec{y}^* \vec{x} = \overline{\vec{x}^* \vec{y}}$.

Rechenregeln: Für Matrizen A, B , deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Für eine invertierbare Matrix A sind auch A^T und A^* invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Wende dazu die Rechenregeln auf $B = A^{-1}$ an und beachte $I^T = I = I^*$, wobei I die jeweilige Einheitsmatrix sei.

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Dann gilt:

- (a) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- (b) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^*\vec{y})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^m, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Man schreibe das Skalarprodukt wie oben angegeben und benutze die Rechenregeln. □

Ende Di
18.04.23

16.6. Orthogonale und unitäre Matrizen: Eine wichtige Rolle spielen Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, deren zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, das Skalarprodukt invariant lässt, dh für die gilt:

$$(A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

Damit verändert A auch *Winkel* und *Abstände* nicht. Eine solche Matrix A hat Kern $A = \{\vec{0}\}$, ist also invertierbar. Aus den Rechenregeln folgt

$$A^T A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \quad A^* A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit dieser Eigenschaft heißt *orthogonal* (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. *unitär* (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Somit gilt

$$A^T = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal, } A^* = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ unitär.}$$

Bemerkung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- 1) A ist genau dann unitär, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n bilden.
- 2) A ist genau dann unitär, wenn für jedes Orthonormalsystem v_1, \dots, v_m in \mathbb{C}^n auch Av_1, \dots, Av_m ein Orthonormalsystem von \mathbb{C}^n ist.
- 3) Produkte, Inverse, Transponierte und Adjungierte von unitären Matrizen sind unitär.

Beispiele: 1) Spiegelungen in \mathbb{C}^n : etwa $A\vec{e}_1 = -\vec{e}_1$, $A\vec{e}_j = \vec{e}_j$ für $j = 2, \dots, n$.

2) Rotation in \mathbb{R}^2 um den Winkel $\theta \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

3) Im \mathbb{R}^3 Rotation um die z -Achse bei Spiegelung an der (x, y) -Ebene:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

16.7. Orthogonalprojektionen: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt, b_1, b_2, \dots, b_m ein Orthonormalsystem in V und $U := \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Die lineare Abbildung

$$P : V \rightarrow U, v \mapsto Pv = \sum_{j=1}^m (v|b_j)b_j$$

hat folgende Eigenschaften:

$$P \circ P = P, \quad \text{Bild } P = U, \quad \text{Kern } P = \{v \in V : v \perp u \text{ für alle } u \in U\}.$$

Es gilt $(v - Pv|u) = 0$ für alle $u \in U$, $v \in V$, und

$$\|v - Pv\| = \min\{\|v - u\| : u \in U\} \quad \text{für jedes } v \in V,$$

dh Pv ist die (eindeutig bestimmte) *Bestapproximation* von v in U . Die Abbildung P heißt *Orthogonalprojektion* von V auf U .

Beweis. Klar ist $\text{Bild } P \subseteq U$. Nach der Bemerkung in 16.3 gilt $Pu = u$ für alle $u \in U$, also ist $P \circ P = P$ und $\text{Bild } P = U$. Für jedes $v \in V$ gilt:

$$Pv = 0 \iff (v|b_j) = 0 \text{ für alle } j \iff (v|u) = 0 \text{ für alle } u \in U.$$

Außerdem ist für $k = 1, \dots, m$:

$$(v - Pv|b_k) = (v|b_k) - (Pv|b_k) = (v|b_k) - \sum_{j=1}^m (v|b_j) \underbrace{(b_j|b_k)}_{=\delta_{jk}} = (v|b_k) - (v|b_k) = 0,$$

und folglich auch $(v - Pv|u) = 0$ für alle $u \in U$. Schließlich gilt für $u \in U$:

$$\begin{aligned}\|v - u\|^2 &= \|v - Pv + Pv - u\|^2 = \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2 + 2\operatorname{Re}(v - Pv|Pv - u) \\ &= \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2.\end{aligned}$$

Hieran sieht man, dass Pv die eindeutige Bestapproximation von v in U ist. □

Bemerkung: 1) Im Gram-Schmidt-Verfahren in 16.4 hat man im k -ten Schritt (für $k = 2, \dots, m$) und für $U = \operatorname{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$, dass $c_k = v_k - Pv_k$ und somit $c_k \perp u$ für jedes $u \in U$ wie gewünscht.

2) Der Satz kann in vielen Situationen angewendet werden, insbesondere auch wenn V unendlich-dimensional ist. Mittels einer Folge $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$, wobei immer $U_m := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ist, und zugehörigen Orthogonalprojektionen P_m von V auf U_m kann man hoffen, durch die Folge $(P_m v)_{m \in \mathbb{N}}$ ein gegebenes $v \in V$ immer besser zu approximieren. Wir kommen darauf später im Rahmen von Fourierreihen zurück.

16.8. Matrixgruppen: Wir beginnen mit einer

Definition: Eine *Gruppe* ist eine nicht-leere Menge G , versehen mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$, geschrieben $a \circ b$ bzw. meist nur ab , mit folgenden Eigenschaften:

- (G1) $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$ (Assoziativität),
- (G2) $\exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$ (Existenz des neutralen Elements),
- (G3) $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$ (Existenz inverser Elemente).

Das neutrale Element e und inverse Elemente sind eindeutig bestimmt: Schreibweise a^{-1} , also $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Eine Gruppe (G, \circ) mit kommutativer Verknüpfung \circ , dh mit $ab = ba$ für alle $a, b \in G$, heißt *abelsch*.

Bemerkung: In einer Gruppe G lassen sich die Gleichungen $ax = b$ und $xa = b$ (für beliebig gegebene $a, b \in G$) eindeutig lösen:

$$\begin{aligned}ax = b &\iff x = ex = a^{-1}ax = a^{-1}b \\ xa = b &\iff x = xe = xaa^{-1} = ba^{-1}.\end{aligned}$$

Beispiele: 1) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, neutrales Element ist 0.

2) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$ sind abelsche Gruppen. Ist V ein Vektorraum, so ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.

3) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe, neutrales Element ist 1.

4) Bzgl. der Matrixmultiplikation ist

$$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : A \text{ ist invertierbar}\}$$

eine Gruppe, die *allgemeine (generelle) lineare Gruppe*, die für $n \geq 2$ nicht abelsch ist. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix I_n .

In $GL(n, \mathbb{K})$ gibt es viele kleinere Gruppen (sogenannte *Untergruppen*). Neutrales Element ist dabei die Einheitsmatrix I_n .

5) $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ ist orthogonal}\}$ ist eine Gruppe, die *orthogonale Gruppe*.

6) $U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A \text{ ist unitär}\}$ ist eine Gruppe, die *unitäre Gruppe*.

7) Die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, |a| + |b| > 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist eine abelsche Gruppe, die $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ entspricht.

8) Die Menge

$$\{A \in O(2) : A\vec{e}_1 = \vec{e}_1\}$$

ist eine abelsche Gruppe mit zwei Elementen.

9) Sei $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$. Die Menge

$$\{A \in O(2) : A(M) = M\}$$

ist eine Gruppe mit acht Elementen.

Ende Do
20.04.23

17 Determinanten und Kreuzprodukt

Idee der Determinante: Zu gegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ gibt $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ das mit einem Vorzeichen versehene Volumen des von den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannten *Spates*

$$\{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n : \lambda_j \in [0, 1] \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$

an. “Mit Vorzeichen versehen” bedeutet dabei, dass $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ das Vorzeichen wechselt, wenn man einen Vektor \vec{a}_j durch $-\vec{a}_j$ ersetzt. Bei $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ stellen wir uns die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ als *Spalten* einer *Matrix* vor.

Beispiel: Der von den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ im \mathbb{R}^n aufgespannte Spat ist der *Einheitswürfel*

$$Q := [0, 1]^n.$$

Dieser hat Volumen = 1 (Produkt der Seitenlängen).

17.1. Definierende Eigenschaften der Determinante: Die Determinante ist eine Abbildung $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_n \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

$$(D1) \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1,$$

$$(D2) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \alpha \vec{a}_j + \beta \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \alpha \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \beta \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n), \end{aligned}$$

$$(D3) \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0, \text{ falls es } j \neq k \text{ gibt mit } \vec{a}_j = \vec{a}_k.$$

Bemerkung: Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante \det eindeutig bestimmt (ohne Beweis). (D1) bedeutet eine Normierung (vgl. Beispiel oben). (D2) bedeutet, dass die Determinante in jeder Spalte *linear* ist. Zusammen mit (D3) bedeutet (D2), dass \det eine *alternierende Multilinearform* ist.

Beachte außerdem, dass (D2) und (D3) die Idee eines mit Vorzeichen versehenen Volumens umsetzen: Bei (D3) ist der aufgespannte Spat “flach”, hat also kein Volumen; (D2) kann man sich mit Streckung und Scherung veranschaulichen.

Schreibweise: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden \det meist als Funktion auf $\mathbb{K}^{n \times n}$, dh auf dem Raum der quadratischen Matrizen.

- 17.2. Folgerungen:** (a) Ist eine Spalte $= \vec{0}$, so ist auch die Determinante $= 0$.
 (b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.
 (c) Vertauscht man zwei Spalten miteinander, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
 (d) Sind die Spalten von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ linear abhängig (dh gilt $\text{Rang } A < n$), so ist $\det(A) = 0$.
 (e) Es gilt: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär.

Erinnerung: Eine Matrix $\in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt regulär, falls sie invertierbar ist, bzw. falls die zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ bijektiv (oder injektiv oder surjektiv) ist (vgl. 15.16 in HM I).

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen).

Beweis. (a) folgt sofort aus (D2). (b) folgt leicht aus (D2) und (D3).
 zu (c): Wegen (b) und (D2) ist

$$\begin{aligned}
 & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
 = & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
 = & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
 = & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\
 = & -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).
 \end{aligned}$$

zu (d): Es sei etwa die letzte Spalte Linearkombination der anderen Spalten. Wegen (D2) und (D3) gilt dann:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_j) = 0.$$

Wegen (d) muss man bei (e) nur noch zeigen: $\text{Rang } A = n$ impliziert $\det(A) \neq 0$. Dazu bringen wir A durch elementare Spaltenumformungen (analog zu Zeilenumformungen, nur für Spalten statt für Zeilen) auf die Gestalt der Einheitsmatrix I_n . Dabei wird nach (D2) (für $\vec{b}_j = 0$) und (b) und (c) $\det(A)$ nur mit Zahlen $\neq 0$ multipliziert. Wegen (D1) ist schließlich $\det(I_n) = 1 \neq 0$. \square

Beweis. (D1) ist klar, und (D2) ist nicht so schwer. Zum Beweis von (D3) seien zwei Spalten von A gleich, etwa die k_0 -te und die k_1 -te, wobei $k_0 < k_1$. In der Summe verschwindet dann $\det(A_{1k})$ für alle $k \notin \{k_0, k_1\}$, da in diesen A_{1k} zwei Spalten gleich sind (weder die k_0 -te noch die k_1 -te sind gestrichen worden). Also ist die rechte Seite

$$= (-1)^{k_0+1} a_{1k_0} \det(A_{1k_0}) + (-1)^{k_1+1} a_{1k_1} \det(A_{1k_1}).$$

Hierbei ist $a_{1k_0} = a_{1k_1}$ nach Voraussetzung. Wir erhalten A_{1k_1} aus A_{1k_0} , indem wir durch sukzessives Vertauschen benachbarter Spalten die $(k_1 - 1)$ -te Spalte (von A_{1k_0}) an die k_0 -te Stelle bringen. Dazu brauchen wir $k_1 - 1 - k_0 = k_1 - k_0 - 1$ Vertauschungen. Also ist

$$\det(A_{1k_1}) = (-1)^{k_1 - k_0 - 1} \det(A_{1k_0}),$$

und die rechte Seite ist $= 0$. □

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von der Form $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix}$, also eine *untere Dreiecksmatrix*, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$.

17.6. Determinantenentwicklungssatz: Die Formel in 17.5 nennt man *Entwicklung von $\det(A)$ nach der ersten Zeile* von $A = (a_{jk})_{jk}$. Mit denselben Argumenten kann man $\det(A)$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Für jedes $l \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix bezeichne, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und der k -ten Spalte entsteht.

Beispiel: Man entwickelt möglichst nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, hier z.B. nach der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3 \cdot 6) = -8.$$

17.7. Das Signum einer Permutation: Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Die Menge S_n aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ hat genau $n!$ Elemente.

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt man zweckmäßigerweise $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{smallmatrix})$ oder auch nur $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$.

EndeMo
24.04.23

Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ definiert man das *Signum* (oder *Vorzeichen*) $\text{sgn } \sigma$ von σ durch

$$\text{sgn } \sigma := \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Das Produkt hat genau $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ Faktoren.

Bemerkung: (a) Es gilt stets $\text{sgn } \sigma \in \{1, -1\}$, genauer ist $\text{sgn } \sigma = (-1)^m$, wobei m die Anzahl der Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

(b) Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\text{sgn } (\sigma \circ \tau) = \text{sgn } (\sigma) \text{sgn } (\tau)$. Das folgt aus

$$\frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

Beispiele: (1) Vertauscht $\tau \in S_n$ gerade zwei bestimmte Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ (eine solche Permutation heißt *Transposition*), so gilt $\text{sgn } \tau = -1$, denn: Vertauscht τ etwa die Zahlen $i_0 < i_1$, so sind die Paare (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade (i_0, k) und (k, i_1) mit $i_0 < k < i_1$ und (i_0, i_1) . Das m in Bemerkung (a) ist also ungerade.

(2) Lässt sich σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ schreiben (dies ist tatsächlich für jede Permutation der Fall), so ist $\text{sgn } \sigma = 1$ für gerades m und $= -1$ für ungerades m . Das m ist dabei nicht eindeutig bestimmt!

(3) $n = 4$, $\sigma = (2, 3, 4, 1)$: Es ist $\text{sgn } \sigma = -1$, zB da man durch drei Transpositionen die 1 nach vorne bekommt. Oder da die Paare (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade $(1, 4), (2, 4), (3, 4)$ sind.

17.8. Die Leibnizformel für Determinanten: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Einträgen a_{jk} . Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

(ohne Beweis). Ebenfalls ohne Beweis:

Folgerung: Für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

Beispiel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ von der Form $\begin{pmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, also eine *obere Dreiecksmatrix*, so gilt $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$.

17.9. Determinantenmultiplikationssatz: Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

(ohne Beweis).

Insbesondere gilt für eine reguläre Matrix A : $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Interpretation: Die Matrix B habe die Spalten $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$. Der von diesen Spalten aufgespannte Spat hat das (mit Vorzeichen versehene) Volumen $\det(B)$. Dieser Spat wird von der zur Matrix A gehörenden linearen Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ auf den von den Spalten $A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n$ der Matrix AB aufgespannten Spat mit (vorzeichenbehaftetem) Volumen $\det(AB)$ abgebildet.

Bildet man also mit der zur Matrix A gehörenden Abbildung einen beliebigen Spat ab, **so muss man dessen (vorzeichenbehaftetes) Volumen mit $\det(A)$ multiplizieren.**

17.10. Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ sei und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ habe. Wenn die Matrix A regulär ist, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, wobei für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{b}}_j, \dots, \vec{a}_n) / \det(A).$$

Zur Berechnung der j -ten Komponente x_j der Lösung muss man also die j -te Spalte von A durch den Vektor \vec{b} ersetzen, die Determinante berechnen und durch die Determinante von A dividieren.

Beweis. Wir haben $\vec{b} = \sum_{l=1}^n x_l \vec{a}_l$, also ist wegen (D2):

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{b}}_j, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{l=1}^n x_l \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_l}_j, \dots, \vec{a}_n).$$

Wegen (D3) bleibt rechts nur der Summand für $l = j$ stehen, dh $x_j \det(A)$. □

17.11. Eine Formel für die inverse Matrix: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär mit Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$. Geht man zur Berechnung von A^{-1} wie in 15.16 (HM I) vor und verwendet die Cramersche Regel 17.10, so erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{e}_k}_j, \dots, \vec{a}_n) \right)_{j,k=1}^n.$$

Die Formel für $n = 2$ in Beispiel 15.16 (HM I) ist ein Spezialfall.

17.12. Orientierung: Die Idee in 17.1 war, dass $\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ das mit Vorzeichen versehene Volumen des von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spates beschreibt. Wegen (D2) (und (D1)) nimmt \det auch negative Werte an. Das eigentliche Volumen ist $|\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)|$. Aber auch das Vorzeichen von $\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ trägt Information.

Zwischenspiel: Ist V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so kann man φ eine Determinante $\det \varphi$ zuordnen, indem man eine Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ von V wählt, die Abbildung φ bzgl. dieser Basis durch eine Matrix A darstellt und $\det \varphi := \det(A)$ setzt.

Ist nämlich $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ eine weitere Basis von V , so erhalten wir die Darstellungsmatrix \tilde{A} von φ bzgl. dieser Basis als $\tilde{A} = S^{-1}AS$, wobei S die Darstellungsmatrix der Identität $V \rightarrow V$ ist, wenn man “vorne” die Basis $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ und “hinten” die Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ nimmt. Wegen 17.9 ist dann

$$\det(\tilde{A}) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A) = \det \varphi,$$

dh die Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Definition: Eine bijektive Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ heißt *orientierungstreu*, falls $\det \varphi > 0$ ist, und *orientierungsumkehrend*, falls $\det \varphi < 0$ ist.

Eine geordnete Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von \mathbb{R}^3 heißt *Rechtssystem*, falls $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) > 0$ ist. Meist ist dabei $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ eine Orthonormalbasis.

Satz: Ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ein Rechtssystem in \mathbb{R}^3 und $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientierungstreu, so ist auch $\varphi(\vec{b}_1), \varphi(\vec{b}_2), \varphi(\vec{b}_3)$ ein Rechtssystem.

Beispiel: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist ein Rechtssystem, $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2$ ist kein Rechtssystem.

Ende Di
25.04.23

17.13. Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im \mathbb{R}^3 : Für zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ist das *Kreuzprodukt* $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der senkrecht auf \vec{x} und \vec{y} steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms ist und für den $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$ ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

$$(0) \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$

(1) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, allgemeiner $\vec{e}_{\sigma(1)} \times \vec{e}_{\sigma(2)} = \text{sgn } \sigma \vec{e}_{\sigma(3)}$ für jede Permutation $\sigma \in S_3$ (denn $\det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}) = \text{sgn } \sigma$).

(2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$ und $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y},$$

dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ genau dann, wenn \vec{x}, \vec{y} linear abhängig sind.

Anwendung Lorentzkraft: Eine in einem Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte elektrische Ladung q erfährt die *Lorentzkraft*

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

und wird dadurch abgelenkt (zB \rightarrow Elektromotor). Das durch \vec{v} und \vec{B} aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $\|\vec{v}\|\|\vec{B}\|\sin \varphi$, wobei φ der Winkel zwischen \vec{v} und \vec{B} ist. Die größte Kraft wirkt somit, wenn \vec{v} und \vec{B} zueinander senkrecht sind. Sind hingegen \vec{v} und \vec{B} parallel, so ist $\vec{F} = \vec{0}$ und es wirkt keine Kraft.

Berechnung: Man berechnet $\vec{x} \times \vec{y}$ formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Begründung: Bezeichnet man die rechte Seite mit \vec{z} , so sieht man leicht $(\vec{z}|\vec{x}) = \det(\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$ und $(\vec{z}|\vec{y}) = \det(\vec{y}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$ ein. Außerdem ist

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \|\vec{z}\|^2 \geq 0.$$

Der Flächeninhalt a des von \vec{x}, \vec{y} aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $a = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin \varphi$, wobei φ der von \vec{x} und \vec{y} eingeschlossene Winkel ist. Wegen $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \varphi$ erhalten wir

$$a^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2.$$

Nun rechnet man nach, dass

$$\|\vec{z}\|^2 + (\vec{x}|\vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

gilt (zur Übung empfohlen).

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

Warnung: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ! So ist zB

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0}.$$

17.14. Das Spatprodukt: Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ heißt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y} | \vec{z})$ das *Spatprodukt* von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Satz: Es gilt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Beweis. Man weist für die linke Seite die Eigenschaften (D1)–(D3) der Determinante nach. □

Beispiel: $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ (vgl. die Begründung oben). Anschaulich ist das auch klar, da $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ das Volumen des aufgespannten Spates ist, welches man wegen der Orthogonalität von $\vec{x} \times \vec{y}$ auf dem durch \vec{x}, \vec{y} aufgespannten Parallelogramm als Produkt von $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ mit der Parallelogrammfläche erhält.

Sind \vec{x}, \vec{y} linear unabhängig, so ist $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 und zwar ein Rechtssystem.

Eine Basis $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ von \mathbb{R}^3 ist genau dann ein Rechtssystem, wenn \vec{z} auf derselben Seite der durch \vec{x}, \vec{y} aufgespannten Ebene liegt wie $\vec{x} \times \vec{y}$.

18 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen

18.1. Eigenwerte und Eigenvektoren: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A , falls es ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Jedes solche \vec{x} heißt *Eigenvektor zum Eigenwert* λ (von A).

Der *Eigenraum von A zum Eigenwert λ* ist

$$E_A(\lambda) := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Er besteht aus $\vec{0}$ und allen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ .

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ linear. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von φ , falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Jedes solche v heißt *Eigenvektor zum Eigenwert* λ (von φ). Den Eigenraum definiert man entsprechend.

Beachte: $\vec{0}$ ist kein Eigenvektor!

Beispiele: (1) 1 ist der einzige Eigenwert von I_n .

(2) Die Diagonalelemente d_1, d_2, \dots, d_n einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

sind Eigenwerte von D . Für $j = 1, \dots, n$ ist der j -te Einheitsvektor \vec{e}_j ein Eigenvektor zum Eigenwert d_j .

(3) Die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Eigenwert i mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten von nun an komplexe Matrizen.

18.2. Bemerkungen (geometrische Vielfachheit): Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $\text{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$ ist. In diesem Fall ist $E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_n)$.

(b) Zu jedem Eigenwert λ von A ist $E_A(\lambda)$ ein Untervektorraum von \mathbb{C}^n mit $m := \dim(E_A(\lambda)) \geq 1$. Die Zahl m heißt *geometrische Vielfachheit des Eigenwertes* λ .

(c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(d) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A , so gilt $k \leq n$ und

$$\dim(E_A(\lambda_1)) + \dim(E_A(\lambda_2)) + \dots + \dim(E_A(\lambda_k)) \leq n,$$

dh die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist höchstens n .

Beweis. (d) folgt aus (c). (c) zeigt man durch Induktion nach der Anzahl k verschiedener Eigenwerte. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ verschiedene Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1}$. Zum Beweis von deren Unabhängigkeit seien $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{0}$. Durch Multiplikation mit A bzw. mit λ_{k+1} folgt

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j A \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_{k+1} \vec{x}_j.$$

Durch Differenzbildung erhalten wir

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$ für $j = 1, \dots, k$, also $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \dots, k$ wegen $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$. Schließlich folgt auch $\alpha_{k+1} = 0$ wegen $\vec{x}_{k+1} \neq 0$. \square

Ende Do
27.04.23

Beispiel: Die Matrix A aus Beispiel 18.1(3) hat genau die Eigenwerte $i, -i$ und es gilt $E_A(i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $E_A(-i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Die geometrische Vielfachheit von i und $-i$ ist also jeweils 1.

18.3. Charakteristisches Polynom und algebraische Vielfachheit: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Das *charakteristische Polynom* p_A von A ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom vom Grad n (wg. 17.8).

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Nullstelle von p_A ist (vgl 17.2(e) und 18.2(a)).

Definition: Die *algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes* λ von A ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_A .

Bemerkung: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist immer \leq seiner algebraischen Vielfachheit.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und m_1, m_2, \dots, m_k die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten, so gilt $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ (vgl. 5.4, HM I).

Beispiele: (1) Der Eigenwert 1 von I_n hat algebraische und geometrische Vielfachheit n : Es ist $E_{I_n}(1) = \mathbb{C}^n$ und $p_{I_n}(\lambda) = \det(I_n - \lambda I_n) = (1 - \lambda)^n$.

(2) In Beispiel 18.2 haben i und $-i$ jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

Es ist $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$.

(3) Der Eigenwert 1 der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1: Es gilt $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = (\lambda - 1)^2$ und $E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

18.4. Ähnliche Matrizen: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1}AS$.

Bemerkung: (a) Es gilt dann $A = SBS^{-1}$, denn

$$SBS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} A \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} = A,$$

dh auch B, A sind ähnlich.

(b) Sind A, B ähnlich und B, C ähnlich, so sind auch A, C ähnlich, denn $B = S^{-1}AS$ und $C = R^{-1}BR$ implizieren

$$C = R^{-1}S^{-1}ASR = (SR)^{-1}A(SR)$$

und mit S und R ist auch SR regulär.

(c) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante und dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist nämlich $B = S^{-1}AS$, so gilt

$$\det(B) = (\det(S))^{-1} \det(A) \det(S) = \det(A)$$

und

$$p_B(\lambda) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda).$$

Also sind Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten gleich. Weiter gilt für jeden Eigenwert λ von A :

$$\begin{aligned} E_A(\lambda) &= \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : S^{-1}A\vec{x} = \lambda S^{-1}\vec{x}\} \\ &= S(\{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : \underbrace{S^{-1}AS}_{=B}\vec{y} = \lambda\vec{y}\}) = S(E_B(\lambda)), \end{aligned}$$

wobei wir $\vec{x} = S\vec{y}$ geschrieben haben. Umgekehrt gilt $E_B(\lambda) = S^{-1}(E_A(\lambda))$. Da S regulär ist, haben $E_A(\lambda)$ und $E_B(\lambda)$ dieselbe Dimension.

Skizze:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \\ S \uparrow & & \downarrow S^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Man kann die Skizze so interpretieren, dass die zur Matrix A gehörige lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ in der durch die Spalten der regulären Matrix S gegebenen Basis durch die Matrix B dargestellt wird.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist regulär.

Es gilt $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}AS = B$. Also sind A, B ähnlich.

Ist φ_A die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, so wird φ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch die Matrix B dargestellt, dh φ streckt in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 4 und in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 2.

Anwendung: Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) + y(t), \\ y'(t) &= x(t) + 3y(t). \end{aligned}$$

Setzt man $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, so erhält man

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{S^{-1}AS}_{=B} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

also das entkoppelte System $u'(t) = 4u(t)$, $v'(t) = 2v(t)$, welches sich leicht lösen lässt: $u(t) = ae^{4t}$, $v(t) = be^{2t}$. Die Lösungen des ursprünglichen Systems erhält man dann durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{2t} \\ ae^{4t} - be^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutige Lösung zum Anfangswert $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist wegen $\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b = 1/2$ also gegeben durch $x(t) = (e^{4t} + e^{2t})/2$, $y(t) = (e^{4t} - e^{2t})/2$ für $t \in \mathbb{R}$.

18.5. Die Spur einer Matrix: Für $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definiert man die *Spur* von A durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj},$$

dh als Summe der Diagonaleinträge.

Satz: (a) Für $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $\text{Spur}(AC) = \text{Spur}(CA)$.

(b) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

(c) Ist $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ das charakteristische Polynom der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gilt $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Spur}(A)$ und $a_0 = \det(A)$.

Beweis. (a) Gilt $C = (c_{kl})_{kl}$, so ist $AC = (\sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kl})_{jl}$ und $CA = (\sum_{j=1}^n c_{lj} a_{jk})_{lk}$, also

$$\text{Spur}(AC) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} a_{jk} \right) = \text{Spur}(CA).$$

(b) Unter Verwendung von (a) gilt für eine reguläre Matrix S :

$$\text{Spur}(\underbrace{S^{-1}AS}_{=C}) = \text{Spur}(SS^{-1}A) = \text{Spur}(A).$$

(c) $a_0 = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$. Aussage über a_{n-1} ohne Beweis ($n = 2$ siehe unten, man kann einen Induktionsbeweis führen und z.B. $\det(A - \lambda I)$ nach der ersten Zeile entwickeln). \square

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{=\det(A)} - \underbrace{(a + d)}_{=\text{Spur}(A)} \lambda + \lambda^2.$$

Hier sind die Eigenwerte von A sogar durch $\det A$ und $\text{Spur } A$ eindeutig bestimmt.

18.6. Diagonalisierung von Matrizen: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, dh falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so gibt, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Ende Di
02.05.23

Beispiel: Nach dem Beispiel in 18.4 ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar.

Bemerkung: Auf der Diagonalen von D müssen dann die Eigenwerte von A stehen, gemäß

ihrer algebraischen Vielfachheit wiederholt. Ist nämlich $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, so ist

jedes $d \in \{d_j : j = 1, \dots, n\}$ ein Eigenwert von D mit algebraischer Vielfachheit = Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $d_j = d$. Der Eigenraum zu d ist

$$E_D(d) = \text{Kern}(D - dI) = \text{lin}\{\vec{e}_j : j \in \{1, \dots, n\}, d_j = d\},$$

also stimmt die geometrische Vielfachheit von d mit der algebraischen Vielfachheit überein.

Satz: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von A geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Eine entsprechende Matrix S erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Vektoren als Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$ in eine Matrix S . Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor \vec{s}_j , so erhält man $AS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1 \vec{s}_1, \lambda_2 \vec{s}_2, \dots, \lambda_n \vec{s}_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}AS = D$.

Beispiel: Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2,$$

also ist 4 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, und 1 ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Für die Eigenräume gilt

$$E_A(4) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

dh für jeden Eigenwert von A sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich und A ist diagonalisierbar. Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Folgende Eigenschaften sind ebenfalls äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

- (a) A hat n unabhängige Eigenvektoren, dh \mathbb{C}^n hat eine Basis aus Eigenvektoren von A .
 (b) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A ist n .

Folgerung: Hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar (dann ist nämlich für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit = 1).

18.7. Symmetrische und hermitesche Matrizen: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = A^T$ heißt *symmetrisch*. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A = A^*$ heißt *hermitesch* oder *selbstadjungiert*.

Beispiele: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ aus dem Beispiel in 18.4 ist symmetrisch. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$ ist hermitesch.

Satz: (a) Eine hermitesche Matrix A hat nur reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

(b) Jede hermitesche Matrix A läßt sich diagonalisieren, wobei die Matrix S unitär, dh mit $S^* = S^{-1}$, gewählt werden kann. Für reelle symmetrische Matrizen kann $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dh mit $S^T = S^{-1}$ gewählt werden (ohne Beweis).

Beweis. zu (a): Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$(A\vec{x}|\vec{x}) = (\vec{x}|A^*\vec{x}) = (\vec{x}|A\vec{x}) = \overline{(A\vec{x}|\vec{x})}, \text{ dh } (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}.$$

Sei λ ein Eigenwert von A und \vec{x} ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda \|\vec{x}\|^2 = (\lambda\vec{x}|\vec{x}) = (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}, \text{ also } \lambda = \frac{(A\vec{x}|\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mu \neq \lambda$ ein weiterer Eigenwert mit Eigenvektor \vec{y} , so gilt

$$\lambda(\vec{x}|\vec{y}) = (\lambda\vec{x}|\vec{y}) = (A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\mu\vec{y}) = \mu(\vec{x}|\vec{y}),$$

also $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$ wegen $\lambda \neq \mu$. □

Beispiele: Die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ läßt sich durch die orthogonale Matrix $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisieren (siehe 18.4 und 18.6).

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ aus dem Beispiel in 18.6 ist symmetrisch, die dort angegebene Matrix S ist nicht orthogonal. Hier reicht es nicht, die gefundenen Eigenvektoren auf Länge 1 zu bringen, da die beiden Eigenvektoren zum Eigenwert 4 nicht

orthogonal sind. Wir können aber das Gram-Schmidt-Verfahren verwenden und setzen

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{s}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{c} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \vec{s}_2 \right) \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{s}_3 &:= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Matrix mit den Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ ist orthogonal und diagonalisiert A .

Bemerkung: Allgemeiner gilt, dass sich eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ genau dann unitär diagonalisieren läßt, wenn sie *normal* ist, dh genau dann, wenn $AA^* = A^*A$ gilt.

Es sei noch der folgende tiefliegendere Satz angegeben:

18.8. Satz (Jordan-Normalform): Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ die folgende Blockmatrix-Struktur hat

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_j (*Jordanblock*) die Gestalt

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

hat, dh auf der Hauptdiagonalen steht bei J_j ein Eigenwert, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.

Insgesamt stehen in der *Jordannormalform* J auf der Diagonalen die Eigenwerte von A , gemäß ihren Vielfachheiten wiederholt und auf der Nebendiagonalen stehen nur Einsen und Nullen. Dabei ist die Anzahl der Einsen gerade n minus die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte.

Bemerkung: Die Spalten der Matrix S erhält man hier durch eine geeignete Wahl von Basen in den *Haupträumen* $\text{Kern}((A - \lambda I_n)^n)$, wobei λ die Eigenwerte von A durchläuft.

Beispiel (zum Hauptraum): Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $p_A(\lambda) = -\lambda^3$, dh 0 ist

einzigster Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$,

also $\dim \text{Kern}(A) = 1$, $\dim(\text{Kern}(A^2)) = 2$ und $\dim(\text{Kern}(A^3)) = 3$.

Ende Do
04.05.23

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A , wobei jeder Eigenwert gemäß seiner algebraischen Vielfachheit wiederholt sei. Dann gilt

$$\det(A) = \det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad \text{und} \quad \text{Spur}(A) = \text{Spur}(J) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

dh $\det(A)$ ist das Produkt der Eigenwerte und $\text{Spur}(A)$ ist die Summe der Eigenwerte.

Beispiel (zur Jordan-Normalform): Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, also ist 2 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Weiter ist

$$E_A(2) = \text{Kern}(A - 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

also hat der Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit 1 und $\vec{s}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor. Nun sucht man einen Vektor \vec{s}_2 mit $(A - 2I)\vec{s}_2 = \vec{s}_1$ und findet $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei nun S die Matrix mit den Spalten \vec{s}_1, \vec{s}_2 . Dann haben wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei die Jordan-Normalform hier nur einen Jordan-Block hat.

18.9. Definitheit reeller symmetrischer Matrizen: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}^T A \vec{x}$, die zugehörige *quadratische Form*.

A heißt *positiv definit*, falls $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

A heißt *negativ definit*, falls $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

A heißt *positiv semidefinit*, falls für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$.

A heißt *negativ semidefinit*, falls für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$.

A heißt *indefinit*, falls es $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ und $\vec{y}^T A \vec{y} < 0$.

Bemerkung: Ist $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

Also ist A positiv definit.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann gilt:

A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

A ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\lambda \geq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist negativ semidefinit genau dann, wenn $\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist indefinit genau dann, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (gemäß algebraischer Vielfachheit wiederholt). Diagonalisiere A mit einer orthogonalen Matrix S : $S^T A S = D$, wobei D die Spalten $\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n$ hat. Schreibe $\vec{x} = S \vec{y}$, wobei $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Dann ist $\vec{x} = \vec{0}$ äquivalent zu $\vec{y} = \vec{0}$ und

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T S^T A S \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2.$$

□

Folgerung: Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch. Dann ist A indefinit genau dann, wenn $\det(A) < 0$ ist.

A ist positiv definit genau dann, wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) > 0$ ist.

A ist negativ definit genau dann, wenn $\det(A) > 0$ und $\text{Spur}(A) < 0$ ist.

Beispiele: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit. Die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

Für größere Matrizen kann man das folgende verwenden:

Kriterium von Hurwitz: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle *Hauptunterdeterminanten* positiv sind, dh wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

für alle $m = 1, 2, \dots, n$ gilt.

18.10. Allgemeine quadratische Formen: Eine *allgemeine quadratische Form* $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Gestalt $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ sind.

Beispiel:

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2) &= 2x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 + 7 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7. \end{aligned}$$

18.11. Quadriken und Hauptachsentransformation: Sei $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ eine allgemeine quadratische Form auf dem \mathbb{R}^n . Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : q(\vec{x}) = 0\}$ heißt *Quadrik* und für $n = 2$ auch *Kegelschnitt*.

Für Quadriken gibt es bestimmte *Normalformen*.

Satz: Sei $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ eine allgemeine quadratische Form auf dem \mathbb{R}^n . Sei $r = \text{Rang}(A)$ und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die von Null verschiedenen Eigenwerte von A (gemäß ihrer Vielfachheit wiederholt). Dann gibt es eine orthogonale Matrix $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(V) = 1$ und einen Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Quadrik $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : q(V\vec{y} + \vec{p}) = 0\}$ durch eine der folgenden Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + \beta &= 0, \quad \text{falls } \text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A) = r, \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + 2\gamma y_n &= 0, \quad \text{falls } \text{Rang}(A|\vec{b}) > \text{Rang}(A) = r. \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist im ersten Fall $\beta \neq 0$, so kann man durch $-\beta$ dividieren und für jedes $j = 1, \dots, r$ Zahlen $\alpha_j > 0$ definieren durch $|\lambda_j/\beta| = \alpha_j^{-2}$. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ die Spalten von V , so heißen die Geraden $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_j\}$, $j = 1, \dots, r$, *Hauptachsen* und die zugehörigen α_j *Achsenabschnitte*.

Beweisidee: Im Fall $r < n$ setze $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Diagonalisiere A durch eine orthogonale Matrix V mit $\det(V) = 1$, dh $V^T A V = D$. Dann gilt für jeden Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{q}(\vec{y}) := q(V\vec{y} + \vec{p}) = \vec{y}^T V^T A V \vec{y} + 2(\vec{b}^T + \vec{p}^T A) V \vec{y} + q(\vec{p}).$$

Dabei ist $\vec{y}^T V^T A V \vec{y} = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$. Wir können den linearen Term $2(\vec{b}^T + \vec{p}^T A) V \vec{y}$ eliminieren, wenn wir \vec{p} finden mit $\vec{p}^T A = -\vec{b}^T$, dh wenn das lineare Gleichungssystem $A(-\vec{p}) = \vec{b}$ lösbar ist, dh wenn $\text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A) = r$ gilt. Das führt auf die erste Gleichung.

Der Fall $\text{Rang}(A|\vec{b}) > \text{Rang}(A) = r$ ist komplizierter und führt auf die zweite Gleichung.

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c = 24$ und $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50,$$

also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 5$. Die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 und die entsprechende Matrix V sind

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $-A\vec{p} = \vec{b}$ hat die eindeutige Lösung $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die neuen Koordinaten $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$q(\vec{p}) = \vec{p}^T A \vec{p} + 2\vec{b}^T \vec{p} + c = -\vec{p}^T \vec{b} + 2\vec{b}^T \vec{p} + c = \vec{b}^T \vec{p} + c = -34 + 24 = -10$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik in den neuen Koordinaten $10y_1^2 + 5y_2^2 - 10 = 0$, also $y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} - 1 = 0$. Das ist eine Ellipse. Die Hauptachsen sind $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_1\}$, $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_2\}$ mit den Achsenabschnitten $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = \sqrt{2}$.

19 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir schreiben Vektoren \vec{x} im \mathbb{R}^n mit den Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n als n -Tupel

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ oder als Spaltenvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Für $n = 2, 3$ schreiben wir häufig $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

19.1. Konvergenz von Folgen in \mathbb{R}^n : Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in \mathbb{R}^n heißt *konvergent*, falls es einen Vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben dann $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0$ oder $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$ ($k \rightarrow \infty$).

Bemerkung: Wegen $\|\vec{y}\|^2 = \sum_{j=1}^n |y_j|^2$ gilt für eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n mit $\vec{x}_k = ((\vec{x}_k)_1, \dots, (\vec{x}_k)_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \quad (k \rightarrow \infty) \iff \text{für alle } j = 1, \dots, n: (\vec{x}_k)_j \rightarrow (\vec{x}_0)_j \quad (k \rightarrow \infty).$$

Beispiel: Sei $\vec{x}_k := \begin{pmatrix} e^{-k} \\ 1 - 1/k \end{pmatrix}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\vec{x}_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $k \rightarrow \infty$.

19.2. Offene und abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^n : Ist $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$, so heißt

$$K(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

offene Kugel um \vec{x}_0 mit Radius r .

Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es zu jedem $\vec{x}_0 \in Q$ ein (von \vec{x}_0 abhängiges) $r > 0$ gibt mit $K(\vec{x}_0, r) \subseteq Q$.

Beispiele: \mathbb{R}^n ist offen. Offene Kugeln sind offen. Der Würfel $(0, 1)^n$ ist offen.

Beweis. Wir zeigen, dass $K(\vec{y}_0, s)$ offen ist. Dazu sei $\vec{x}_0 \in K(\vec{y}_0, s)$, dh $\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < s$. Wir setzen $r := s - \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$ (Idee aus Skizze) und zeigen $K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{y}_0, s)$. Dazu sei $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, r)$, dh $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$. Dann gilt

$$\|\vec{x} - \vec{y}_0\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{y}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < r + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = s,$$

also $\vec{x} \in K(\vec{y}_0, s)$. □

Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Satz: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in A , die in \mathbb{R}^n konvergiert, der Grenzwert $\lim_k \vec{x}_k$ wieder zu A gehört.

Beweis. Sei A abgeschlossen, also $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen. Sei (\vec{x}_k) eine Folge in A mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\vec{x}_0 \notin A$, so finden wir $\varepsilon > 0$ mit $K(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Wegen $x_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ liegen dann aber in $K(\vec{x}_0, \varepsilon)$ überhaupt keine x_k im Widerspruch zu $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$. Also gilt $\vec{x}_0 \in A$.

Sei andererseits A nicht abgeschlossen, dh $\mathbb{R}^n \setminus A$ nicht offen. Dann finden wir $\vec{x}_0 \notin A$ so, dass für jedes $r > 0$ gilt $A \cap K(\vec{x}_0, r) \neq \emptyset$. Wir finden dann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\vec{x}_k \in A \cap K(\vec{x}_0, 1/k)$. Es ist dann $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \notin A$. \square

Beispiele: \mathbb{R}^n ist abgeschlossen. Endliche Mengen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kugeln

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}_0\| \leq s\}$$

sind abgeschlossen.

19.3. Stetigkeit von Funktionen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$, die *Komponentenfunktionen von f* mit

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Definition: Die Funktion f heißt *stetig in $\vec{x}_0 \in D$* , falls für alle Folgen $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in D mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$ gilt: $f(\vec{x}_k) \rightarrow f(\vec{x}_0)$.

f heißt *stetig in D* , falls f in **jedem** $\vec{x}_0 \in D$ stetig ist.

Definition: Ein $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt von D* , falls es eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{\vec{x}_0\}$ gibt mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$ für $k \rightarrow \infty$.

Sei $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von D . Wir schreiben

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{c},$$

falls $f(\vec{x}_k) \rightarrow \vec{c}$ für jede Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{\vec{x}_0\}$, die gegen \vec{x}_0 konvergiert. In diesem Fall ist \vec{c} eindeutig bestimmt.

Wie in HM I gilt dann auch hier: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in D stetig, wenn für alle $\vec{x}_0 \in D$, die Häufungspunkt von D sind, gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Beispiel: Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$.

Dann ist f in D stetig: sei $(x_0, y_0) \in D$ und $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_k \rightarrow x_0$, $y_k \rightarrow y_0$. Dann gilt auch $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ und (wegen $x_0 > 0$ und der Stetigkeit von \arctan) $\arctan(y_k/x_k) \rightarrow \arctan(y_0/x_0)$. Also $f(x_k, y_k) \rightarrow f(x_0, y_0)$.

Bemerkung: Wegen 19.1 ist f stetig in \vec{x}_0 (bzw. in D) genau dann, wenn jede Komponentenfunktion f_j , $j = 1, \dots, m$, stetig in \vec{x}_0 (bzw. in D) ist.

Beispiele: (1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. f ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. f ist aber in $(0, 0)$ nicht stetig, denn für $x_k = y_k = 1/k$ gilt

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{2x_k^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x|y|^\beta(x^2 + y^2)^{-1} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, wobei $\beta > 1$. Die Funktion ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. f ist auch $(0, 0)$ stetig, denn wegen $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ gilt

$$|f(x, y)| = \frac{|y|^{\beta-1}}{2} \frac{2|xy|}{x^2 + y^2} \leq |y|^{\beta-1}/2 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

(3) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist ϕ stetig: Wegen $\|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})\| = \|\phi(\vec{x} - \vec{y})\|$ reicht es, Stetigkeit in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ zu zeigen. Für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\phi(\vec{x})\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \phi(\vec{e}_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\phi(\vec{e}_j)\| \leq \|\vec{x}\| \sqrt{\sum_{j=1}^n \|\phi(\vec{e}_j)\|^2}.$$

Für $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$ gilt also $\|\phi(\vec{x})\| \rightarrow 0$.

(4) Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig. Die Addition $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind stetig, des weiteren Skalarprodukt, Matrix-Vektor-Produkt, Multiplikation von Matrizen, Determinante und Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 . Auch die auf den regulären Matrizen erklärte Matrixinversion ist stetig (Cramersche Regel!).

Satz: (a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig in $\vec{x}_0 \in D$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $\vec{x} \in D$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ gilt: $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$.

(b) Sei D offen. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge Q von \mathbb{R}^m die Menge $f^{-1}(Q)$ (das Urbild von Q) offen ist.

Beispiel: Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist die Menge $M_b := \{(x, y) \neq (0, 0) : xy/(x^2 + y^2) < b\}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , denn: $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := xy/(x^2 + y^2)$, ist stetig in D , $Q_b := (-\infty, b)$ ist offene Teilmenge von \mathbb{R} . Also ist $f^{-1}(Q_b) = M_b$ nach dem Satz offen.

19.4. Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Definition: Die Funktion f heißt *differenzierbar in* $t_0 \in I$, falls es einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \vec{a}.$$

In diesem Fall heißt \vec{a} *Ableitung von f in t_0* , geschrieben $f'(t_0) := \vec{a}$. Ableitungen nach einem reellen Parameter t schreibt man gerne auch mit Punkt, also als $\dot{f}(t_0)$.

f heißt *differenzierbar in I* , falls f in **jedem** $t_0 \in I$ differenzierbar ist, und f heißt *stetig differenzierbar in I* oder *eine C^1 -Funktion*, falls $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zusätzlich stetig ist.

Bemerkung: Wegen 19.1 ist f differenzierbar in t_0 [bzw. in I] genau dann, wenn jede Komponentenfunktion f_j , $j = 1, \dots, n$, differenzierbar in t_0 [bzw. in I] ist. Es gilt dann

$$\dot{f}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig genau dann, wenn alle $\dot{f}_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, stetig sind.

Beispiele: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben durch

(1) $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ mit $r > 0$ und $I = [0, 2\pi]$ (Kreisrand um $(0, 0)$ mit Radius r). Dann gilt $\dot{x}(t) = -r \sin t$, $\dot{y}(t) = r \cos t$, und f ist C^1 .

(2) $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$ mit $I = [0, \infty)$ (*logarithmische Spirale*). Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \\ \dot{y}(t) &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, \end{aligned}$$

und f ist C^1 .

(3) Wir können das Differentialgleichungssystem $\dot{x}(t) = 3x(t) + y(t)$, $\dot{y}(t) = y(t) + 3x(t)$ mittels $z(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ schreiben als $\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} z(t)$.

19.5. Raumkurven: Eine *Raumkurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Meist ist I von der Form $[a, b]$. Die Menge $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Spur von γ* oder *Bild von γ* .

Sind $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kurven, so heißt γ_2 eine *Umparametrisierung* von γ_1 , falls es eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung $\phi : I \rightarrow J$ gibt, für die $\phi^{-1} : J \rightarrow I$ ebenfalls stetig differenzierbar ist¹ und für die gilt

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad t \in I.$$

Insbesondere haben γ_1 und γ_2 dieselbe Spur. Die Bemerkung in 19.4 und die Kettenregel aus HM I zeigen, dass dann außerdem gilt:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \dot{\gamma}_2(\phi(t))\dot{\phi}(t), \quad t \in I.$$

Ist ϕ (streng) monoton wachsend [bzw. fallend], heißt die Umparametrisierung *orientierungserhaltend* [bzw. *orientierungsumkehrend*].

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für jedes $t \in I$ gilt. Damit ist auch jede Umparametrisierung regulär.

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, und *doppelpunktfrei*, falls $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist.

Beispiele: (1) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Dann ist γ_1 regulär. Wegen $\dot{\gamma}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist γ_2 nicht regulär. Insbesondere ist γ_2 keine Umparametrisierung von γ_1 , obwohl γ_1 und γ_2 dieselbe Spur haben.

(2) Sei $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $\gamma_2 : [-\pi/2, 5\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Dann haben γ_1 und γ_2 dieselbe Spur. γ_1 ist regulär und γ_2 ist nicht regulär. γ_2 durchläuft das Bild von γ_1 dreimal.

19.6. Bogenlänge von Raumkurven: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Raumkurve, so ist ihre *Länge* (oder *Bogenlänge*) gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Bemerkung: (a) $L(\gamma)$ ändert sich nicht unter Umparametrisierung.

(b) Eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ lässt sich nach der Bogenlänge s parametrisieren:

$$\psi(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b],$$

¹Aufgrund der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist dies äquivalent zu: $\phi : I \rightarrow J$ ist bijektiv und stetig differenzierbar mit $\dot{\phi}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

ist streng monoton wachsend und stetig differenzierbar mit $\dot{\psi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ für alle $t \in [a, b]$. Die Umkehrabbildung $\phi : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ ist also ebenfalls C^1 und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$ hat die Eigenschaft

$$\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = 1 \quad \text{für alle } s \in [0, L(\gamma)].$$

Diese Parametrisierung heißt auch *natürliche Parametrisierung*. Häufig behält man den Buchstaben γ bei und schreibt einfach $\gamma(s)$, Ableitungen nach der Bogenlänge s werden üblicherweise mit Strich geschrieben.

Beispiele: Die Abbildungen aus Beispiel 19.4(1) und (2) sind Raumkurven.

(1) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$. Dann gilt (vgl. 19.4):

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Das ist der Umfang eines Kreises mit Radius r . Die natürliche Parametrisierung ist wegen

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \int_0^t r d\tau = r t$$

hier gegeben durch $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$.

(2) Für die logarithmische Spirale $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$ berechnen wir unter der Verwendung der Formel für $\dot{\gamma}(t)$ aus Beispiel 19.4(2):

$$L(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{2}.$$

Hier gilt für $t \geq 0$:

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \sqrt{2} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Auflösung nach t ergibt

$$t = -\ln \frac{\sqrt{2} - s}{\sqrt{2}} = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - s}.$$

Die natürliche Parametrisierung ist hier also

$$\tilde{\gamma} : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \cos \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \\ \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \sin \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \end{pmatrix}.$$

19.7. Richtungsableitungen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Definition: f heißt in $\vec{x}_0 \in D$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

in \mathbb{R}^m existiert. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$ heißt *Richtungsableitung von f in \vec{x}_0 in Richtung \vec{v}* .

Bemerkung: Da D offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $\vec{x}_0 + t\vec{v} \in D$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Setzt man $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$, $|t| < \delta$, so ist $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \dot{g}(0)$ (vgl 19.4).

19.8. Partielle Ableitungen: In der Situation von 19.7 heißen Richtungsableitungen von f in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ *partielle Ableitungen von f* , dh

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x}_0) \quad \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_k \text{ im Punkt } \vec{x}_0$$

für $k = 1, \dots, n$. Man schreibt oft auch nur $f_{x_k}(\vec{x}_0)$.

Beispiele: (1) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ ist offen. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{-x} \cos y + \ln z$. In jedem Punkt $(x, y, z) \in D$ existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{z}.$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$. Sei $\vec{v} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Richtung. Es gilt für $t \neq 0$:

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{1}{t} \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Der Limes für $t \rightarrow 0$ existiert in \mathbb{R} genau dann, wenn $\xi\eta = 0$ ist, dh genau dann, wenn $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ ist. Also existiert $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ genau dann, wenn \vec{v} ein Vielfaches von \vec{e}_1 oder ein Vielfaches von \vec{e}_2 ist.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$. Für $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ gilt hier

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{t^3}{t^3} \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2 + \eta^2}$$

und wir erhalten für $t \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial (\xi, \eta)}(0, 0) = \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2 + \eta^2}$$

für jede Richtung $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$.

Übung: Existiert in \vec{x}_0 die Richtungsableitung von f in Richtung \vec{v} und ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\vec{v})}(\vec{x}_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(\vec{x}_0).$$

19.9. Differenzierbarkeit: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, sowie $\vec{x}_0 \in D$. Idee der Differenzierbarkeit in 19.4 (und in HM I) war im Fall $n = 1$:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{für } \vec{x} \text{ nahe } \vec{x}_0.$$

Dabei ist $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$, dh $h \mapsto f'(\vec{x}_0)h$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition: f heißt *differenzierbar* in $\vec{x}_0 \in D$ (gelegentlich *total differenzierbar* in \vec{x}_0), falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \rightarrow 0 \quad (\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0)$$

bzw.

$$\frac{\|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0 \quad (\vec{h} \rightarrow 0).$$

In diesem Fall ist die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt und heißt *Ableitung von f in \vec{x}_0* , Bezeichnung: $f'(\vec{x}_0) := A$. Andere Bezeichnungen: $Df(\vec{x}_0)$, $J_f(\vec{x}_0)$, *Jacobimatrix*, *Funktionalmatrix*. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

f heißt *differenzierbar in D* , falls f in **jedem** $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar ist.

Bemerkung: f ist in \vec{x}_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(\vec{x}_0) = A$ genau dann, wenn für Approximationsfehler $\psi(\vec{h}) := f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}$ gilt $\frac{\|\psi(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$ für $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$. Man schreibt dafür auch

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + A\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \quad (\|\vec{h}\| \rightarrow 0),$$

wobei $o(\|\vec{h}\|)$ hier für $\psi(\vec{h})$ steht und bedeutet, dass $\frac{\|\psi(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$ für $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$.

Satz: (a) Ist f differenzierbar in \vec{x}_0 , so ist f stetig in \vec{x}_0 .

(b) Ist f differenzierbar in \vec{x}_0 , so existieren in \vec{x}_0 alle Richtungsableitungen von f und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{v} \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{e}_k \quad k\text{-te Spalte von } f'(\vec{x}_0), k = 1, \dots, n,$$

und

$$f'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right)_{j=1, k=1}^{m \quad n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Im Fall $m = 1$ ist also

$$f'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (\text{Zeilenvektor}).$$

Beweis. (a) Es gilt

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \rightarrow f(\vec{x}_0)$$

für $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$, da die lineare Abbildung $f'(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ist.

(b) Für kleine $|t| \neq 0$ haben wir

$$\frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{f'(\vec{x}_0)(t\vec{v}) + o(\|t\vec{v}\|)}{t} = f'(\vec{x}_0)\vec{v} + \frac{o(\|t\vec{v}\|)}{t} \rightarrow f'(\vec{x}_0)\vec{v}$$

für $t \rightarrow 0$. Der Rest folgt. □

Beispiele: (1) Die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) ist **nicht** differenzierbar in $(0, 0)$, da in $(0, 0)$ nicht alle Richtungsableitungen existieren.

(2) Die Funktion f aus Beispiel 19.8(3) ist **nicht** differenzierbar in $(0, 0)$: Es gilt $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. Wäre f differenzierbar in $(0, 0)$, so wäre $f'(0, 0) = (0 \ 0)$ und somit $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 0$. Nach Beispiel 19.8(3) ist aber $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 1/2 \neq 0$.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}y^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ist in $(0, 0)$ differenzierbar: Zunächst berechnen wir $f_x(0, 0) = 0$ und $f_y(0, 0) = 0$. Unser Kandidat für $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ist also $A := (0 \ 0)$. Nun schätzen wir ab:

$$\frac{\|f(x, y) - f(0, 0) - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|^{3/2}y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \leq |x|^{1/2} \rightarrow 0$$

für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist f in $(0, 0)$ differenzierbar, und es gilt $f'(0, 0) = (0 \ 0)$.

Ende Di
16.05.23

(4) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x}) = B\vec{x}$, wobei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Für $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = B(\vec{x} + \vec{h}) - B\vec{x} = B\vec{x} + B\vec{h} - B\vec{x} = B\vec{h}.$$

Wir wählen also $A := B$ in der Definition und erhalten, dass f auf \mathbb{R}^n differenzierbar ist mit $f'(\vec{x}) = B$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ konstant.

(5) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x}$, wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch sei. Dann gilt für $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = (\vec{x} + \vec{h})^T B (\vec{x} + \vec{h}) - \vec{x}^T B \vec{x} = \vec{x}^T B \vec{h} + \underbrace{\vec{h}^T B \vec{x}}_{=\vec{x}^T B \vec{h}} + \vec{h}^T B \vec{h} = 2\vec{x}^T B \vec{h} + \vec{h}^T B \vec{h}.$$

Die Abbildung $\vec{h} \mapsto 2\vec{x}^T B \vec{h}$ ist linear, und es gilt

$$|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) - 2\vec{x}^T B \vec{h}| = |\vec{h}^T B \vec{h}| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2$$

(vergleiche Beweis in 18.9: Die Abschätzung ist klar, wenn B eine Diagonalmatrix ist. Ist B keine Diagonalmatrix, so diagonalisiere B durch eine orthogonale Matrix S , dh $D = S^T B S$ bzw. $B = S D S^T$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |\vec{h}^T B \vec{h}| &= |\vec{h}^T S D S^T \vec{h}| = |(S^T \vec{h})^T D (S^T \vec{h})| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } D\} \cdot \|S^T \vec{h}\|^2 \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2 \end{aligned}$$

wegen $\|S^T \vec{h}\| = \|\vec{h}\|$.)

19.10. Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition: f heißt in D *partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D existieren, und *stetig partiell differenzierbar* in D , falls die partiellen Ableitungen zusätzlich auf D stetig sind.

Satz: Sei f in D partiell differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in \vec{x}_0 , so ist f in \vec{x}_0 differenzierbar.

Definition: Eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar*, geschrieben $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) gilt $f_x = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ und $f_y = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$.

19.11. Ableitungen höherer Ordnung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert die partielle Ableitung $\partial f / \partial x_k$, so kann $\partial f / \partial x_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sein. Man gelangt so gegebenenfalls zu *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend werden (falls vorhanden) Ableitungen höherer Ordnung definiert.

Schreibweisen: $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = f_{yxx}$ etc.

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig (partiell) differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ auf D existieren und dort stetig sind. Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^k(D, \mathbb{R})$.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt k -mal stetig differenzierbar, $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, falls für alle Komponentenfunktionen f_j , $j = 1, \dots, m$ gilt: $f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$.

Satz von Schwarz: Ist $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, so sind partielle Ableitungen einer Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beispiel: Für die Funktion f aus Beispiel 19.8(2) existieren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Also ist $f \in C^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Man schreibt dafür auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$.

19.12. Der Gradient: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in D , so ist der Gradient von f in $\vec{x}_0 \in D$ der Vektor der partiellen Ableitungen in \vec{x}_0 , also

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt statt $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ auch $\nabla f(\vec{x}_0)$ ("Nabla f "), wobei der Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als *Differentialoperator* verstanden wird, der auf die reellwertige Funktion f wirkt und daraus die vektorwertige Funktion $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ macht.

Bemerkung (Zusammenhang mit der Ableitung): Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in D differenzierbar, so gilt für $\vec{x}_0 \in D$:

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$$

(beachte $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$).

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar und $\text{grad } f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Dann gilt für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$:

$$-\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \leq \|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|.$$

Dabei gilt Gleichheit rechts genau dann, wenn $\vec{v} = \text{grad } f(\vec{x}_0) / \|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|$ ist (dh "der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f ").

Außerdem steht $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ senkrecht auf der *Niveaulinie/-fläche* $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$.

Beweis. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \stackrel{19.9}{=} f'(\vec{x}_0)\vec{v} = (\text{grad } f(\vec{x}_0))^T \vec{v} = (\text{grad } f(\vec{x}_0)) \cdot \vec{v}.$$

Nun verwendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

EndeMo
22.05.23

19.13. Kettenregel: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $f(D) \subseteq G$, und sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0)$. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in \vec{x}_0 , und es gilt:

$$\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(“äußere Ableitung mal innere Ableitung”).

Beispiele: (1) Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Dann ist $F \circ \phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto F(\phi(t))$ differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ \phi)'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\phi(t)) \phi_j'(t), \quad t \in I,$$

wobei $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von ϕ sind. Ist $n = 3$ und

schreibt man $F(x, y, z)$, $\phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ und $\tilde{F}(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, so gilt

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

(2) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sowie $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{x}) := f(B\vec{x})$. Dann gilt

$$\underbrace{\nabla F(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^m} = F'(\vec{x})^T = (f'(B\vec{x})B)^T = B^T (f'(B\vec{x}))^T = \underbrace{B^T}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{(f'(B\vec{x}))^T}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

19.14. Der Umkehrsatz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $\vec{x}_0 \in D$ und $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **regulär**. Dann gibt es offene Mengen U und V mit $\vec{x}_0 \in U \subseteq D$, $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0) \in V$ derart, dass $f : U \rightarrow V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(\vec{y}) = \left(f'(f^{-1}(\vec{y})) \right)^{-1}, \quad \vec{y} \in V.$$

Bemerkung: Die Eigenschaft *regulär* ersetzt hier für $n > 1$ die Bedingung $f'(x_0) \neq 0$, die im Fall $n = 1$ vorausgesetzt werden muss. Die Formel für die Ableitung von f^{-1} erhält man auch aus der Kettenregel, wenn man die Gleichung

$$\vec{x} = f^{-1}(f(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U,$$

nach \vec{x} ableitet. Das ergibt

$$I_n = (f^{-1})'(f(\vec{x}))f'(\vec{x}), \quad \text{also} \quad (f^{-1})'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$$

für jedes $\vec{x} \in U$.

ACHTUNG: Der Satz besagt nur, dass es **lokal** eine Umkehrfunktion zu f gibt. Auf ganz D muss dies nicht gelten!

Beispiele: (1) Sei $D := (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Dann ist D offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, sowie

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\det f'(r, \varphi) = r > 0$ ist $f'(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$ regulär, und nach dem Umkehrsatz ist f lokal bijektiv.

Andererseits ist f die Polarkoordinatenabbildung und $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$ für alle $(r, \varphi) \in D$, dh $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist *nicht* injektiv. Genauer ist $f(r, \varphi) = f(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ genau dann, wenn $r = \tilde{r}$ und es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\varphi = \tilde{\varphi} + 2k\pi$.

Es ist $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aber $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** bijektiv. Hingegen ist etwa $f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ bijektiv.

(2) Wir betrachten die komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ für $z = x + iy$ als Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, also $F(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$. \mathbb{R}^2 ist offen und $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und $\det F'(x, y) = e^{2x} > 0$. Also ist $F'(x, y) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ regulär und F ist nach dem Umkehrsatz lokal bijektiv.

Wir haben $F = f \circ h$, wobei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$, $h(x, y) = (e^x, y)$ bijektiv ist. Nach (1) ist also $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *nicht* injektiv, $F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$ (was wir für die komplexe Exponentialfunktion ja schon wissen) und etwa $F : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ bijektiv. Die Umkehrabbildung $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ ist ein komplexer Logarithmus, und für $(u, v) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \notin (-\infty, 0] \times \{0\}$ mit $y \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$\begin{aligned} (F^{-1})'(u, v) &= (F'(x, y))^{-1} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass für $a + ib \in \mathbb{C}$ die Matrix für die lineare Abbildung $z \mapsto (a + ib)z$, wenn man sie als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachtet, gerade $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist, so sieht man, dass die Ableitung von F^{-1} an der Stelle (u, v) gerade Multiplikation mit der komplexen Zahl $\frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{1}{u+iv}$ ist. Die Ableitung des komplexen Logarithmus an der Stelle z ist also $\frac{1}{z}$, wie im Reellen.

19.15. Der Satz über implizit definierte Funktionen:

Motivation: Die Gleichung $y - x^2 = 0$ lässt sich eindeutig nach y auflösen durch $y = x^2$. Die Auflösung von $x - y^2 = 0$ nach y ist hingegen global nicht mehr möglich.

Für gegebene (x_0, y_0) mit $x_0 - y_0^2 = 0$ und $y_0 > 0$ bzw. $y_0 < 0$ ist diese Auflösung lokal noch möglich (durch $y = \sqrt{x}$ bzw. $y = -\sqrt{x}$ für (x, y) nahe (x_0, y_0)). Jedoch ist in keiner Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eine Auflösung durch eine **Funktion** möglich.

Ende Di
23.05.23

Satz: Sei $n > m$, $p := n - m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit Komponentenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben die Variablen in \mathbb{R}^n als (\vec{x}, \vec{y}) mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, sowie

$$f'(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

wobei wir den linken Block als $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und den rechten Block als $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bezeichnen.

Ist $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$ mit $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ **regulär** (dh $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$), so gibt es offene Umgebungen U von \vec{x}_0 und V von \vec{y}_0 , sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow V$ derart, dass für alle $\vec{x} \in U$ und $\vec{y} \in V$ gilt: $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ und

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = g(\vec{x}),$$

dh durch die Funktion $g : U \rightarrow V$ ist (lokal um (\vec{x}_0, \vec{y}_0)) eine eindeutige Auflösung der Gleichung $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ nach \vec{y} gegeben (bzw. $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in U \times V : f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}\}$ ist Graph der Funktion $g : U \rightarrow V$).

Bemerkung: Ableitungen von g kann man nach der Kettenregel aus

$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in U,$$

berechnen: es ist

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})) + \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))g'(\vec{x}), \quad \vec{x} \in U,$$

also

$$g'(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U.$$

Beispiele: (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y - x^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$ für alle x_0, y_0 mit $f(x_0, y_0) = 0$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y^2$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sinh(yz) + (z - x)^2 - 1 \\ \cos^2(\pi y) + z - x^2/2 \end{pmatrix}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$. Hier ist $n = 3$, $p = 1$, $m = 2$, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix regulär ist und $f(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist in einer Umgebung von $(2, 0, 1)$ eine Auflösung des Gleichungssystems $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach y und z (jeweils als Funktion von x) möglich. Dh es gibt Funktionen $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung U von 2, und eine offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(0, 1)$ derart, dass für alle $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ ist dabei C^1 mit

$$g'(2) = \begin{pmatrix} g'_1(2) \\ g'_2(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0, 1) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Man kann den Satz verwenden, um zu Parameterdarstellungen von implizit gegebenen Flächen im \mathbb{R}^3 zu kommen. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ der Oberfläche der Einheitskugel (dh der Einheitssphäre) S^2 . Hier ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, und $n = 3$, $m = 1$, $p = 2$. Es gilt

$$f'(x, y, z) = (2x \ 2y \ 2z) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Haben wir also einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ mit $z_0 \neq 0$, so finden wir offene Umgebungen U von (x_0, y_0) , V von z_0 und auf U eine auflösende Funktion $g(x, y)$ derart, dass für $(x, y, z) \in U \times V$ gilt

$$(x, y, z) \in S^2 \iff z = g(x, y).$$

Hier kann man U , V und g konkret angeben: $g(x, y) = \operatorname{sgn}(z_0) \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ auf $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und z.B. $V = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot (0, \infty)$. In Punkten $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ mit $z_0 = 0$ ist so eine lokale Auflösung nach z nicht möglich. Man kann dann aber zumindest nach einer der Variablen x oder y lokal auflösen.

(5) Sei $q \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{q \times q}$ der reellen $q \times q$ -Matrizen als \mathbb{R}^{q^2} . Sei $f : \mathbb{R}^{q \times q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(A, \lambda) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$. Dann ist f stetig differenzierbar. Sei $A_0 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sei ein Eigenwert von A_0 . Dann gilt $f(A_0, \lambda_0) = 0$. Wir wollen die Gleichung $f(A, \lambda) = 0$ lokal bei (A_0, λ_0) nach λ auflösen. Nach dem Satz geht das, wenn $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A_0, \lambda_0) \neq 0$. Wir schreiben $p_{A_0}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\nu r(\lambda)$, wobei ν die algebraische Vielfachheit von λ_0 ist und also $r(\lambda)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $r(\lambda_0) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A_0, \lambda_0) = \frac{d}{d\lambda} p_{A_0}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_0} = [\nu(\lambda - \lambda_0)^{\nu-1} r(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^\nu r'(\lambda)]|_{\lambda=\lambda_0} = \begin{cases} r(\lambda_0) & , \nu = 1 \\ 0 & , \nu > 1 \end{cases} ,$$

also $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(A_0, \lambda_0) \neq 0$ genau dann, wenn $\nu = 1$, dh wenn λ_0 *einfacher* Eigenwert von A_0 ist. Ist also λ_0 einfacher Eigenwert von A_0 , so finden wir offene Umgebungen U von A_0 in $\mathbb{R}^{q \times q}$ und V von λ_0 in \mathbb{R} und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow V$ so, dass für $A \in U$, $\lambda \in V$ gilt

$$f(A, \lambda) = 0 \text{ (dh } \lambda \text{ ist EW von } A) \iff \lambda = g(A),$$

dh insbesondere, dass Matrizen in U genau einen Eigenwert nahe λ_0 haben (der dann auch einfach ist) und dass dieser stetig (sogar differenzierbar) von der Matrix abhängt.

Als Bonus (nicht in der Vorlesung):

Beweisidee 19.15 \Rightarrow 19.14: Setze $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - f(\vec{x})$. Es ist $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) = -f'(\vec{x})$ regulär. Also kann man $\vec{y} - f(\vec{x}) = \vec{0}$ lokal nach \vec{x} auflösen. Die Auflösung ist f^{-1} .

Beweisidee 19.14 \Rightarrow 19.15: Setze $F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ f(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}$. Dann ist $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial f}{\partial \vec{y}} \end{pmatrix}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Wegen $\det F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$ ist $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ regulär. Setze $g(\vec{x}) :=$ zweite Komponente von $F^{-1}(\vec{x}, \vec{0})$. Dann gilt:

$$\vec{y} = g(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix} = F^{-1}(\vec{x}, \vec{0}) \Leftrightarrow F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}.$$

Ende Do
25.05.23

19.16. Der Satz von Taylor: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $l \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{l+1}(D, \mathbb{R})$ und $\vec{x}_0 \in D$.

Für $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \vec{h} \cdot \nabla &:= h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ (\vec{h} \cdot \nabla) f(\vec{x}_0) &:= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

und

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 := \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) := \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend definiert man für $k = 1, 2, \dots, l+1$:

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^k := \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0) := \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k=1}^n h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(\vec{x}_0).$$

Beispiel: Für $n = 2$, $\vec{h} = (h_1, h_2)$ und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ hat man also

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f = h_1^2 f_{xx} + h_1 h_2 f_{xy} + h_2 h_1 f_{yx} + h_2^2 f_{yy} = h_1^2 f_{xx} + 2h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}.$$

Wir haben hier den Satz von Schwarz verwendet. Zur allgemeinen Betrachtung von $(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0)$ definieren wir die *Hesse-Matrix von f in \vec{x}_0* :

$$H_f(\vec{x}_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_2 x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) \right)_{j,k=1}^n.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(\vec{x}_0)$ symmetrisch, wenn $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Mit der Hesse-Matrix können wir schreiben

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{h}.$$

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$S[\vec{x}, \vec{y}] = \{ \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) : t \in [0, 1] \}$$

die *Verbindungsstrecke* von \vec{x} und \vec{y} .

Satz von Taylor: Unter den obigen Voraussetzungen seien $\vec{x}_0 \in D$ und $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$. Dann gibt es ein $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$ mit

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!} (\vec{h} \cdot \nabla) f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2!} (\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) + \dots + \frac{1}{l!} (\vec{h} \cdot \nabla)^l f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(l+1)!} (\vec{h} \cdot \nabla)^{l+1} f(\vec{\xi}).$$

Bemerkung: (a) Für $l = 0$ erhält man einen mehrdimensionalen Mittelwertsatz.

(b) Der Ausdruck

$$T_{l, \vec{x}_0}(\vec{h}) := f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^l \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0)}{k!}$$

heißt l -tes Taylorpolynom von f in \vec{x}_0 . Statt \vec{h} schreibt man auch $\vec{x} - \vec{x}_0$.

(c) Für $l = 1$, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ erhalten wir, wenn $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T H_f(\vec{\xi}) \vec{h}$$

für ein $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$. Schreibt man $\vec{x} - \vec{x}_0$ statt \vec{h} , so ist $\vec{x}_0 + \vec{h} = \vec{x}$.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xe^y - 2}$ und $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Dann ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $f_x = e^y f$, $f_y = xe^y f$, sowie $f_{xx} = e^{2y} f$, $f_{xy} = e^y (f + f_y) = (e^y + xe^{2y}) f$, $f_{yy} = xe^y (f + f_y) = (xe^y + x^2 e^{2y}) f$. Wir erhalten

$$f(2, 0) = 1, f_x(2, 0) = 1, f_y(2, 0) = 2, f_{xx}(2, 0) = 1, f_{xy}(2, 0) = 3, f_{yy}(2, 0) = 6,$$

und damit ist das zweite Taylorpolynom von f in $(2, 0)$ gegeben durch

$$T_{2,(2,0)}(h_1, h_2) = 1 + 1 \cdot h_1 + 2h_2 + \frac{1}{2} h_1^2 + 3h_1 h_2 + 3h_2^2,$$

und wenn man $h_1 = x - 2$ und $h_2 = y$ berücksichtigt, erhält man den Ausdruck

$$1 + (x - 2) + 2y + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3(x - 2)y + 3y^2.$$

19.17. Lokale Extremstellen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition: f hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein *lokales Maximum* [bzw. *lokales Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $K(\vec{x}_0, \delta) \subseteq D$ und $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ [bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$] für alle $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, \delta)$ gilt.

Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Satz über lokale Extremstellen: Sei $\vec{x}_0 \in D$.

(a) Hat f in \vec{x}_0 ein lokales Extremum und ist f in \vec{x}_0 partiell differenzierbar, so ist $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

(b) Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Dann gilt:

- (i) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ positiv definit, so hat f in \vec{x}_0 ein lokales Minimum.
- (ii) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ negativ definit, so hat f in \vec{x}_0 ein lokales Maximum.
- (iii) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, so hat f in \vec{x}_0 **kein** lokales Extremum, sondern einen *Sattelpunkt*.

Beispiel für einen Sattelpunkt: Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Dann ist $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt nur für $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Für die Hessematrix gilt

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat eine negative Determinante und ist daher indefinit (siehe 18.9). Somit hat f in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt. Für (x, y) im ersten oder dritten Quadranten ist $f(x, y) = xy > 0$, für (x, y) im zweiten oder vierten Quadranten ist $f(x, y) = xy < 0$.

EndeMo
05.06.23

Bemerkung: Trifft in (b) keiner der Fälle (i), (ii) oder (iii) zu, so ist $H_f(\vec{x}_0)$ (positiv oder negativ) **semidefinit** (vgl. 18.9), und es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Nullstellen des Gradienten heißen auch *kritische Punkte*.

Im Beweis von (b) verwendet man Bemerkung 19.16(c), dh

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h}^T H_f(\vec{\xi}) \vec{h},$$

und die Tatsache, dass man wegen $f \in C^2$ ein $\delta > 0$ so findet, dass $H_f(\vec{\xi})$ für $\vec{\xi} \in K(\vec{x}_0, \delta)$ dieselben Definitheitseigenschaften wie $H_f(\vec{x}_0)$ hat.

Alternativ kann man für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und kleine $t \in \mathbb{R}$ definieren $g(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$. Dann ist $g \in C^2$ mit $g'(t) = \text{grad } f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$, $g'(0) = 0$ und

$$g''(0) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)'(\vec{x}_0) \vec{h} h_j = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0) h_j h_k = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{h}.$$

Verwende nun HM I.

Beispiel: $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. Hier gilt

$$f_x = 3x^2 - 12y, \quad f_y = -12x + 24y^2.$$

Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 = y \\ 2y^2 = x \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} y \in \{0, 1\} \\ 2y^2 = x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det H_f(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = -24 < 0,$$

also ist $H_f(0, 0)$ indefinit und f hat in $(0, 0)$ **kein** lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt. Weiter ist

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

wegen $\det H_f(2,1) > 0$ und $12 > 0$ positiv definit (siehe 18.9). Also hat f in $(2,1)$ ein lokales Minimum.

19.18. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$ und $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$ mit Komponentenfunktionen $h_1, h_2, \dots, h_p : D \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $S := \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Definition: Man sagt " f hat in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Maximum [Minimum] unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$ ", falls $\vec{x}_0 \in S$ gilt und es ein $\delta > 0$ gibt mit $K(\vec{x}_0, \delta) \subseteq D$ und $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ [bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$] für alle $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, \delta) \cap S$.

Zur Existenz: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, falls jede Folge in K eine Teilfolge enthält, die gegen ein $\vec{x}_0 \in K$ konvergiert. Man kann zeigen (das geht wie in HM I):

$$K \text{ ist kompakt} \iff K \text{ ist abgeschlossen und beschränkt.}$$

Dabei heißt K *beschränkt*, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $\|\vec{x}\| \leq M$ für alle $\vec{x} \in K$.

Satz: Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt und es gibt $\vec{a}, \vec{b} \in K$ mit

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in K.$$

Beispiel: Seien $n = 3$, $p = 2$ und $D = \mathbb{R}^3$, sowie

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x + z - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind f, h stetig differenzierbar auf D und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}.$$

Die Menge S ist abgeschlossen: für eine Folge (x_k, y_k, z_k) in S mit $(x_k, y_k, z_k) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Die Menge S ist beschränkt: Sind $(x, y, z) \in S$, so gilt $x^2 + y^2 = 2$ und somit $|x| \leq \sqrt{2}$. Also ist $|z| = |1 - x| \leq 1 + |x| \leq 1 + \sqrt{2}$ und $\|(x, y, z)\| \leq \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})^2} =: M$.

Also ist S kompakt, und nach dem Satz gibt es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ mit $f(\vec{a}) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{b})$ für alle $\vec{v} \in S$.

19.19. Multiplikatorenregel von Lagrange: Seien n, D, f, p, h und S wie in 19.18. Definiere die Funktion $F : D \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) := f(\vec{x}) + \lambda_1 h_1(\vec{x}) + \lambda_2 h_2(\vec{x}) + \dots + \lambda_p h_p(\vec{x})$$

für $\vec{x} \in D$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Satz: Hat f in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$ und gilt

$$\text{Rang } \underbrace{h'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = p \quad [h'(\vec{x}_0) \text{ hat vollen, dh maximalen, Rang}],$$

so gibt es $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ (Lagrangemultiplikatoren) mit

$$\text{grad } F(\vec{x}_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0) = \vec{0}.$$

Bemerkung: (a) Beachte, dass die Zeilen von $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ gerade $\text{grad } h_1(\vec{x}_0)^T, \text{grad } h_2(\vec{x}_0)^T, \dots, \text{grad } h_p(\vec{x}_0)^T$ sind. Die Voraussetzung an den Rang von $h'(\vec{x}_0)$ bedeutet also, dass $\text{grad } h_1(\vec{x}_0), \text{grad } h_2(\vec{x}_0), \dots, \text{grad } h_p(\vec{x}_0)$ linear unabhängig sind.

(b) Schreibt man $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, so ist die Bedingung $\text{grad } F = \vec{0}$ ein Gleichungssystem mit $n + p$ Gleichungen für die $n + p$ Unbekannten $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0$, nämlich

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0, k = 1, 2, \dots, n$) und

$$h_j(\vec{x}_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

(Gleichungen aus $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$, diese sind gleichbedeutend mit $\vec{x}_0 \in S$). Die ersten n Gleichungen besagen dabei, dass $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ eine Linearkombination der Vektoren $\text{grad } h_1(\vec{x}_0), \dots, \text{grad } h_p(\vec{x}_0)$ ist (mit Koeffizienten $\lambda_1^0, \dots, \lambda_p^0$).

(c) Zur Bestimmung der Extrema versucht man, dieses Gleichungssystem zu lösen. Kann man den Satz anwenden (dh sind die Voraussetzungen erfüllt), so findet man die gesuchten Extremstellen unter den Lösungen dieses Gleichungssystems. Kann man den Satz **nicht** anwenden (weil es z.B. lokale Extremstellen \vec{x}_0 gibt, in denen $h'(\vec{x}_0)$ nicht vollen Rang hat), so ist dies **nicht sicher!**

Beispiel (Fortsetzung des Beispiels aus 19.18): Wir wissen schon, dass es $\vec{a}, \vec{b} \in S$ gibt mit: f hat in \vec{a} [bzw. in \vec{b}] ein globales Minimum [bzw. Maximum] unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$.

Wir haben

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $\text{Rang } h'(x, y, z) < 2$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y, z) \in S$ wegen $x^2 + y^2 = 2$ nicht vorkommt. Also ist

$$\text{Rang } h'(x, y, z) = 2 \quad \text{für alle } (x, y, z) \in S,$$

und die Voraussetzungen des Satzes sind insbesondere in \vec{a} und \vec{b} erfüllt. Hier ist

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

und

$$F_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2, \quad F_y = 1 + 2\lambda_1 y, \quad F_z = 1 + \lambda_2, \quad F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2, \quad F_{\lambda_2} = x + z - 1.$$

Aus $\text{grad } F = \vec{0}$ erhält man also $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 \neq 0$, $x = 0$, $z = 1$ und $y = \pm\sqrt{2}$ (der genaue Wert von λ_1 ist nicht wichtig).

Wegen $f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = 1 \pm \sqrt{2}$ ist $\vec{a} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ die Minimal- und $\vec{b} = (0, \sqrt{2}, 1)$ die Maximalstelle. Der maximale Wert von f auf S ist $f(\vec{b}) = 1 + \sqrt{2}$ und der minimale Wert von f auf S ist $f(\vec{a}) = 1 - \sqrt{2}$.

Ende Di
06.06.23

Erläuterung zum Satz (als Bonus):² Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück, dh n , D , f , p und h wie in 19.18, $S = \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Weiter sei $\vec{x}_0 \in S$ mit

$$\text{Rang } h'(\vec{x}_0) = p.$$

Wir zeigen, wie man S lokal in der Nähe von \vec{x}_0 parametrisieren kann. Wir setzen $q := n - p$ und finden p linear unabhängige Spalten von $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Dies seien o.B.d.A. die letzten p Spalten. Wir schreiben $\vec{x} = (\vec{y}, \vec{z})$ mit $\vec{y} = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ und $\vec{z} = (x_{q+1}, \dots, x_{q+p}) \in \mathbb{R}^p$, sowie entsprechend $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Dann ist $\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ regulär (da die Matrix Rang p hat), und nach 19.15 gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^q$ von \vec{y}_0 , $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von \vec{z}_0 und eine C^1 -Funktion $g : U \rightarrow V$ mit $g(\vec{y}_0) = \vec{z}_0$ so, dass für alle $(\vec{y}, \vec{z}) \in U \times V$ gilt:

$$h(\vec{y}, \vec{z}) = \vec{0} \iff \vec{z} = g(\vec{y}).$$

Die Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{y} \\ g(\vec{y}) \end{pmatrix}$ ist also eine Parametrisierung von $S \cap (U \times V)$. Außerdem haben wir

$$g'(\vec{y}_0) = -\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Hat nun f zusätzlich in $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, g(\vec{y}_0))$ eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$, so hat die Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{y} \mapsto f(\vec{y}, g(\vec{y}))$, in \vec{y}_0 eine lokale Extremstelle. Nach Satz 19.17(a) und der Kettenregel ist also

$$\vec{0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) g'(\vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Wir setzen $\vec{\lambda}_0^T := \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ und haben

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0),$$

also

$$f'(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T h'(\vec{x}_0), \quad \text{bzw.} \quad \text{grad } f(\vec{x}_0) = h'(\vec{x}_0)^T \vec{\lambda}_0.$$

Das ist die Aussage des Satzes.

²nicht in der Vorlesung

19.20. Rotation, Divergenz, Laplace: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Skalarfeld (auf D)* und eine Funktion $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld (auf D)*.

Bemerkung: Ist $f \in C^1$ ein Skalarfeld auf D , so ist $\text{grad } f = \nabla f$ ein Vektorfeld auf D .

Partielle Ableitungen schreiben wir im folgenden als

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Definition: Sei $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld auf D mit Komponentenfunktionen $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definiert man die *Divergenz von \vec{v}* durch

$$\text{div } \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j$$

und im Fall $n = 3$ die *Rotation von \vec{v}* durch

$$\text{rot } \vec{v} := \nabla \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: (a) $\text{div } \vec{v}$ ist ein Skalarfeld auf D und $\text{rot } \vec{v}$ ist ein Vektorfeld auf D .

(b) Vektorfelder mit $\text{div } \vec{v} = 0$ heißen *quellenfrei* und Vektorfelder mit $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ heißen *wirbelfrei*.

(c) Für C^2 -Skalarfelder $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man den *Laplaceoperator* durch

$$\Delta f := \text{div grad } f := \nabla \cdot \nabla f := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f,$$

und für C^2 -Vektorfelder $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiele: (1) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$. Dann gilt $\text{div } \vec{v}(\vec{x}) = n$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Im Falle $n = 3$ gilt $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ auf \mathbb{R}^3 .

(2) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\text{rot } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(3) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, sowie $g := f \circ A$, dh $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$. Dann gilt $\Delta g = (\Delta f) \circ A$:

Wir schreiben hier $D\vec{v}$ statt \vec{v}' für die Ableitung eines Vektorfelds \vec{v} . Es gilt dann

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Spur} (D\vec{v}).$$

Nun haben wir nach der Kettenregel (siehe 19.13, Beispiel (2)):

$$\begin{aligned} \Delta g &= \operatorname{div} (\nabla g) = \operatorname{div} (A^T (\nabla f) \circ A) \\ &= \operatorname{Spur} (D(A^T (\nabla f) \circ A)) = \operatorname{Spur} (A^T D((\nabla f) \circ A)) \\ &= \operatorname{Spur} (A^T ((D(\nabla f)) \circ A) A). \end{aligned}$$

Nach Satz 18.5(a) ist dies

$$= \operatorname{Spur} (((D(\nabla f)) \circ A) \underbrace{AA^T}_{=I_n}) = \operatorname{Spur} ((D(\nabla f)) \circ A) = (\operatorname{div} (\nabla f)) \circ A = (\Delta f) \circ A.$$

Bedeutung: Ist $Jf := f \circ A$, so gilt $\Delta f = J^{-1} \Delta Jf$ für jede C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dh Δ ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

(4) Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten: Sei $u = u(x, y)$ eine C^2 -Funktion. Wir verwenden Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ und schreiben $v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Nun wenden wir $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ auf $u(x, y) = v(r(x, y), \varphi(x, y))$ an, wollen dies aber mittels v und den Variablen r, φ ausdrücken. Nach Ketten- und Produktregel haben wir:

$$\begin{aligned} \partial_x v(r, \varphi) &= v_r r_x + v_\varphi \varphi_x \\ \partial_x^2 v(r, \varphi) &= \partial_x (v_r) r_x + v_r r_{xx} + \partial_x (v_\varphi) \varphi_x + v_\varphi \varphi_{xx} \\ &= v_{rr} (r_x)^2 + v_{r\varphi} r_x \varphi_x + v_r r_{xx} + v_{\varphi r} r_x \varphi_x + v_{\varphi\varphi} (\varphi_x)^2 + v_\varphi \varphi_{xx} \\ \Delta v(r, \varphi) &= v_r (r_{xx} + r_{yy}) + v_{rr} ((r_x)^2 + (r_y)^2) + 2v_{r\varphi} (r_x \varphi_x + r_y \varphi_y) \\ &\quad + v_\varphi (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + v_{\varphi\varphi} ((\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2). \end{aligned}$$

Ableitungen von r und φ nach x und y berechnen wir aus $r^2 = x^2 + y^2$ und $\tan \varphi = y/x$:

$$2rr_x = 2x, \quad \text{also} \quad r_x = x/r = \cos \varphi, \quad r_y = y/r = \sin \varphi, \quad (r_x)^2 + (r_y)^2 = 1.$$

Weiter ist $rr_{xx} + (r_x)^2 = 1$, also

$$r_{xx} = \frac{1 - (r_x)^2}{r}, \quad r_{yy} = \frac{1 - (r_y)^2}{r}, \quad r_{xx} + r_{yy} = \frac{2 - (r_x)^2 - (r_y)^2}{r} = \frac{1}{r}.$$

Für die Ableitungen von φ erhalten wir

$$(1 + \tan^2 \varphi) \varphi_x = -y/x^2, \quad (1 + \tan^2 \varphi) \varphi_y = 1/x$$

und wegen $1 + \tan^2 \varphi = (\cos \varphi)^{-2}$:

$$\varphi_x = -\cos^2 \varphi \frac{y}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \varphi_y = \cos^2 \varphi \frac{1}{x} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Wir lesen ab:

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = \frac{1}{r^2}, \quad r_x \varphi_x + r_y \varphi_y = 0.$$

Schließlich ist

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -\cos \varphi \cdot \varphi_x \cdot \frac{1}{r} + \frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot r_x - \sin \varphi \cdot \varphi_y \cdot \frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \cdot r_y = 0.$$

Zusammengefasst haben wir also

$$\Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}$$

als Formel für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

19.21. Rechenregeln:

Produktregel: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\ \nabla \cdot (f\vec{v}) &= f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ \nabla \times (f\vec{v}) &= f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v} \quad (n=3) \\ \Delta(fg) &= (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g) \quad (f, g \in C^2). \end{aligned}$$

Zum Nachrechnen wende man die eindimensionale Produktregel aus HM I auf die einzelnen partiellen Ableitungen an:

$$\partial_j(\phi\psi) = (\partial_j\phi)\psi + \phi(\partial_j\psi).$$

Ende Mo
12.06.23

Hintereinanderausführung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 -Funktionen, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } f) &= \vec{0}, & \text{dh } \nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\ \text{div}(\text{rot } \vec{v}) &= 0 & \text{dh } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= 0 \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{v}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \text{grad } \text{div } \vec{v} - \Delta \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Regeln folgen aus dem Satz von Schwarz.

19.22. Potentialfelder: Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Potentialfeld* (oder *Gradientenfeld*, *konservatives Feld*), falls ein C^1 -Skalarfeld (ein *Potential*) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\vec{v} = \nabla f$ auf D .

Bemerkung: (a) Wegen 19.21 ist ein C^1 -Potentialfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ wirbelfrei in D .

(b) Nach dem Satz von Schwarz gilt für ein C^1 -Potentialfeld $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\vec{v}'(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = \vec{v}'(\vec{x})^T, \quad \vec{x} \in D,$$

dh für alle $j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \text{auf } D.$$

Beispiel: Für eine Punktladung Q im Ursprung $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ ist das elektrische Potential φ im Punkt \vec{x} gegeben durch

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \in D := \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

Das elektrische Feld \vec{E} erhält man als $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Also ist \vec{E} ein Potentialfeld auf D mit Potential $-\varphi$. Wegen

$$\partial_j \varphi(\vec{x}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x_j}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}, \quad \vec{x} \in D.$$

Die Äquipotentialflächen $\{\vec{x} \in D : \varphi(\vec{x}) = c\}$ für $c > 0$ sind hier Kugeloberflächen. Als (negativer) Gradient des Potentials φ steht das elektrische Feld \vec{E} in jedem Punkt \vec{x} senkrecht auf der Äquipotentialfläche durch \vec{x} (vgl. auch 19.12). Nach Bemerkung (a) oben ist das elektrische Feld \vec{E} wirbelfrei in D .

20 Kurvenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^2

20.1. Kurvenintegrale von Skalarfeldern: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ (dh $\gamma \in C^1$ und $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in [a, b]$, siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ Vektoren aus \mathbb{R}^n sind).

Bemerkung: (a) Ist $\tilde{\gamma}$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von γ (siehe 19.5), so gilt $\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds$.

(b) Für $f = 1$ ist $\int_{\gamma} ds$ die Länge von γ (vgl. 19.6). “ $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ ” heißt *skalares Linienelement* von γ .

(c) Ist γ wie oben und setzt man $\rho : [a, b] \rightarrow D$, $\rho(t) := \gamma(a + b - t)$, so durchläuft ρ die Spur von γ in umgekehrter Richtung. Diese Kurve wird auch mit $-\gamma$ bezeichnet. Es gilt dann

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

(d) Sind $\gamma_j : [a_{j-1}, a_j] \rightarrow D$, $j = 1, 2, \dots, m$, reguläre Kurven mit $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$, so bezeichnet man auch $\gamma : [a_0, a_m] \rightarrow D$, $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_{j-1}, a_j]$, als *Kurve*. In den Punkten a_1, a_2, \dots, a_{m-1} muss γ nicht differenzierbar sein, dh die rechts- und linksseitigen Ableitungen in diesen Punkten müssen nicht übereinstimmen. Man schreibt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ und definiert

$$\int_{\gamma} f ds := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f ds.$$

(e) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ geschlossen, dh $\gamma(a) = \gamma(b)$, so schreibt man auch

$$\int_{\gamma} f ds = \oint_{\gamma} f ds.$$

20.2. Kurvenintegrale von Vektorfeldern: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ (siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

(beachte, dass $\gamma(t)$ und $\dot{\gamma}(t)$ Vektoren aus \mathbb{R}^n sind und dass \cdot das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n bezeichnet).

“ $d\vec{s} = \dot{\gamma}(t) dt$ ” heißt *vektorielles Linienelement* von γ .

Bemerkung: Mit $\vec{T}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ (Tangenteneinheitsvektor an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$) haben wir “ $d\vec{s} = \vec{T}(t) ds$ ” (vgl. 20.1) und also

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (\vec{v} \cdot \vec{T}) ds$$

(dazu betrachte man \vec{T} als Funktion auf der Spur von γ , was jedenfalls geht, wenn γ doppelpunktfrei und nicht geschlossen ist; ansonsten muss man γ zusammensetzen wie in Bemerkung 20.1(d)). Die Gleichung bedeutet, dass von dem Vektorfeld \vec{v} entlang γ nur der Tangentialanteil integriert wird.

Beispiele: (1) Es gilt

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

dh das Kurvenintegral eines Vektorfeldes ändert bei Orientierungsumkehr der Kurve das Vorzeichen (vgl. aber mit 20.1 Bemerkung (c)).

(2) Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Skalarfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Das liegt an

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{(\nabla f)(\gamma(t))^T} \dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

und dem Hauptsatz (aus HM I):

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt.$$

(3) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ und

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$. Auch hier gilt

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

20.3. Gebiete und einfach zusammenhängende Mengen: Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für je zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in K$ gilt: $S[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq K$ ($S[\vec{x}, \vec{y}]$ ist die Verbindungsstrecke von \vec{x} und \vec{y} , siehe 19.16).

Beispiele: $K(\vec{0}, 1)$ ist konvex, $K(\vec{0}, 1) \setminus \{\vec{0}\}$ ist nicht konvex.

Definition: Sind $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] := S[\vec{x}_0, \vec{x}_1] \cup S[\vec{x}_1, \vec{x}_2] \cup \dots \cup S[\vec{x}_{m-1}, \vec{x}_m]$$

Streckenzug durch $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$.

Ein Streckenzug ist eine Kurve im Sinne von 20.1 Bemerkung (d).

Definition: Eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein *Gebiet*, falls es zu je zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in G$ einen Streckenzug $S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] \subseteq G$ gibt mit $\vec{x}_0 = \vec{x}$ und $\vec{x}_m = \vec{y}$, dh wenn man je zwei Punkte aus G durch einen ganz in G liegenden Streckenzug verbinden kann.

Beispiele: Ist G offen und konvex, so ist G ein Gebiet. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist ein Gebiet. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist kein Gebiet. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ist kein Gebiet.

Ende Di
13.06.23

Definition: Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es für jeden Streckenzug $S = S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] \subseteq G$ mit $\vec{x}_0 = \vec{x}_m$ einen Punkt $\vec{c} \in G$ und endlich viele Kurven $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k : [0, 1] \rightarrow G$ gibt mit $S = S[\gamma_0(0), \gamma_1(0), \dots, \gamma_k(0), \gamma_0(1)]$, $\gamma_j(1) = \vec{c}$ für $j = 1, \dots, k$ und $S[\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_k(t), \gamma_0(t)] \subseteq G$ für jedes $t \in [0, 1]$.

Dh: Man kann jeden geschlossenen Streckenzug in G zu einem Punkt zusammenziehen. Für Teilmengen $G \subseteq \mathbb{R}^2$ bedeutet dies anschaulich: “ G hat keine Löcher.”

Beispiele: $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Konvexe Mengen sind einfach zusammenhängend.

Gibt es in G einen Punkt $\vec{c} \in G$ mit $S[\vec{x}, \vec{c}] \subseteq G$ für jedes $\vec{x} \in G$ (solche Gebiete heißen *sternförmig*), so ist G einfach zusammenhängend.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ist einfach zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

20.4. Kurvenintegrale und Potentialfelder:

Satz 1: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

- (i) \vec{v} ist Potentialfeld in G .
- (ii) Für je zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in G$ ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unabhängig von der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = \vec{x}$, $\gamma(b) = \vec{y}$.
- (iii) Für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Satz 2: Ist G einfach zusammenhängend und $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld, so ist außerdem äquivalent:

(iv) Für alle $j, k = 1, \dots, n$ gilt: $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ auf G (Verträglichkeitsbedingung).

Für $G \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt also: Ist G einfach zusammenhängend und ist $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ in G , so ist \vec{v} ein Potentialfeld in G .

Beispiele: (1) Sei $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+1 \end{pmatrix}$ auf $G := \mathbb{R}^2$. G ist konvex, also einfach zusammenhängend. Hier gilt

$$\partial_y v_1 = \partial_y(2xy) = 2x = \partial_x(x^2 + 1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Nach Satz 2 ist \vec{v} ein Potentialfeld auf \mathbb{R}^2 . Berechnung eines Potentials f etwa durch den Ansatz:

$$f(x, y) = \int v_1(x, y) dx + \phi(y) = \int 2xy dx + \phi(y) = x^2 y + \phi(y).$$

Nun muss $\partial_y(x^2 y + \phi(y)) = v_2(x, y) = x^2 + 1$ sein, also $x^2 + \phi'(y) = x^2 + 1$, dh $\phi'(y) = 1$ und etwa $\phi(y) = y$. Ein Potential f auf \mathbb{R}^2 ist also gegeben durch $f(x, y) = x^2 y + y$.

(2) Sei $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dann ist \vec{w} ein C^1 -Vektorfeld, das die Bedingung (iv) erfüllt: Es ist

$$\partial_y w_1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x w_2.$$

Für die geschlossene Kurve γ aus Beispiel 20.2(3) gilt aber

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Also ist \vec{w} nach Satz 1 kein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist **nicht** einfach zusammenhängend.

Auf z.B. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ (was konvex, also einfach zusammenhängend ist) ist \vec{w} aber nach Satz 2 ein Potentialfeld und $f(x, y) := \arctan(y/x)$ definiert ein Potential.

Ende Do
15.06.23

20.5. Integration über Teilmengen im \mathbb{R}^2 : Sei $R := [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Man erklärt Integrierbarkeit und Integral für beschränkte Funktionen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ähnlich wie in 10.1 und 10.2 (HM I), indem man Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ und die daraus resultierenden Zerlegungen $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$ von R betrachtet. Ist f integrierbar, schreiben wir

$$\iint_R f(x, y) d(x, y)$$

für das Integral.

Satz 1: Sei $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Beispiel:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Definition: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f über B integrierbar, falls es ein Rechteck R gibt mit $B \subseteq R$ und die Funktion $f_0 : R \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in B \\ 0 & , (x, y) \notin B \end{cases}$, integrierbar ist. Man setzt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_R f_0(x, y) d(x, y).$$

Satz 2: Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei

$$B := \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

und $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $c \leq d$ sind, so ist f über B integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht werden, dh für Mengen

$$C = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\},$$

wobei $a, b : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind mit $a \leq b$ auf $[c, d]$. Es ist dann

$$\iint_C f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Beispiele: (1) Sei $B := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint_B x d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Sei $B := \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist

$$\iint_B d(x, y) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt von B .

Bemerkung: (a) In Satz 2 ist B **abgeschlossen**. Integriert man nur über die **offene** Menge

$$\text{inn}(B) := \{(x, y) : a < x < b, c(x) < y < d(x)\},$$

(das *Innere von B*), so ändert sich das Integral nicht (f ist aber als stetig auf B vorausgesetzt!).

(b) Lässt sich eine abgeschlossene Menge A schreiben als $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, wobei jedes A_j von der Form der obigen Mengen B oder C ist und $\text{inn}(A_1), \text{inn}(A_2), \dots, \text{inn}(A_n)$ paarweise disjunkt sind, so gilt für stetiges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} f(x, y) d(x, y).$$

(c) Wir werden im folgenden über *Gebiete* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ integrieren. Die Funktionen f werden stetig sein auf

$$\bar{G} := G \cup \partial G,$$

wobei ∂G (der *Rand von G*) die Menge aller *Randpunkte von G* ist. Dabei heißt ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *Randpunkt von G*, falls $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ und $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0$ ("in jeder Umgebung von \vec{x} liegen Punkte aus G und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus G$ "). Die Menge \bar{G} ist abgeschlossen.

Beispiele: Es gilt etwa $\partial K(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = r\}$ und $\partial(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$. Für $G = \text{inn}(B)$ von oben gilt

$$\partial G = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \{c(x), d(x)\}\} \cup \{(a, y) : y \in [c(a), d(a)]\} \cup \{(b, y) : y \in [c(b), d(b)]\}.$$

Ende Mo
19.06.23

20.6. Gaußscher Integralsatz im \mathbb{R}^2 : Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet so, dass sich Bemerkung 20.5(b) auf \bar{G} anwenden lässt. Der Rand ∂G von G bestehe aus endlich vielen regulären Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ so, dass $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ (im Sinne von Bemerkung 20.1(d)) geschlossen und doppelpunktfrei ist und ∂G als Spur hat. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt". In dieser Situation schreibt man statt \oint_γ suggestiv auch $\oint_{\partial G}$.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $\bar{G} \subseteq D$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt:

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y).$$

Bemerkung: Manchmal wird auch $\oint_{\partial G} v_1(x, y) dx + v_2(x, y) dy$ statt $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ geschrieben.

Wir betrachten den Fall eines offenen Rechtecks $G = (0, b) \times (0, d)$ und parametrisieren die vier Seiten jeweils durch die Bogenlänge. Dann ist

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^b v_1(x, 0) dx + \int_0^d v_2(b, y) dy - \int_0^b v_1(x, d) dx - \int_0^d v_2(0, y) dy \\ &= \int_0^d \underbrace{v_2(b, y) - v_2(0, y)}_{=\int_0^b \partial_1 v_2(x, y) dx} dy - \int_0^b \underbrace{v_1(x, d) - v_1(x, 0)}_{=\int_0^d \partial_2 v_1(x, y) dy} dx \\ &= \iint_G \left(\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y) \right) d(x, y). \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz ist formuliert für Gebiete G mit einer geschlossenen Randkurve, dh G ist hier einfach zusammenhängend. Gebiete G , die nicht einfach zusammenhängend sind, kann man in einfach zusammenhängende Gebiete “zerschneiden”. Dabei beachte man, dass sich die Kurvenintegrale über die “Schnittlinien” beim Zusammenaddieren wegheben. Der Satz gilt also auch, wenn G so ist, dass sich Bemerkung 20.5(b) auf \overline{G} anwenden lässt, und der Rand ∂G aus endlich vielen disjunkten geschlossenen Kurven im Sinne von Bemerkung 20.1(d) besteht.

20.7. Stokesscher Integralsatz im \mathbb{R}^2 : Seien G , ∂G , D und \vec{v} wie in 20.6. Dann gilt

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\text{rot} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{e}_3 d(x, y).$$

Die rechte Seite hier stimmt nämlich mit der in 20.6 überein.

Bemerkung: Hier kann in der dritten Komponente statt 0 auch eine beliebige Funktion $v_3 \in C^1(D, \mathbb{R})$ stehen.

20.8. Divergenzsatz im \mathbb{R}^2 : Seien G , ∂G , D wie in 20.6 und sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Der Rand ∂G sei parametrisiert durch $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$, $0 \leq s \leq L$ (dh also bzgl. der Bogenlänge). Dann ist $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ und $\|\vec{T}(s)\| = 1$. Setzt man $\vec{N}(s) := \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$, so ist $\vec{N}(s)$, $\vec{T}(s)$ ein Rechtssystem in \mathbb{R}^2 . Da G “links von γ ” liegt, ist $\vec{N}(s)$ senkrecht auf ∂G und nach außen gerichtet (*äußere Einheitsnormale*).

Setzt man $\vec{v} := \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$, so erhält man aus 20.6:

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = \iint_G (\text{div } \vec{w}) d(x, y).$$

Wegen $v_1 = -w_2$ und $v_2 = w_1$ ist nämlich

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot \vec{T} ds = \vec{w} \cdot \vec{N} ds$$

und $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2$.

Bemerkung: In $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds$ wird der Anteil des Vektorfeldes \vec{w} in äußerer Normalenrichtung aufintegriert. Das Integral ist also der *Fluss* des Vektorfeldes durch ∂G (aus G heraus). Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{w}$ ist ein Maß für die *Quelldichte* des Vektorfeldes.

Insbesondere gilt: Ist \vec{w} *quellenfrei* in D (dh $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ in D), so ist $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 0$ für alle G wie in 20.6 mit $\overline{G} \subseteq D$ (und umgekehrt).

Beispiel: Sei $r > 0$ und $G := \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$, $\overline{G} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Wir parametrisieren $\partial G = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Anhand einer Skizze ist klar, dass $\vec{N}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{N}(x, y) = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ für $(x, y) \in \partial G$.

[Parametrisieren wir nach der Bogenlänge, so ist $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$, $s \in [0, 2\pi r]$, und $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/r) \\ \cos(s/r) \end{pmatrix}$, sowie $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} \cos(s/r) \\ \sin(s/r) \end{pmatrix}$].

Das Vektorfeld sei gegeben durch $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y \end{pmatrix}$. Dann gilt $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds &= \iint_G \operatorname{div} \vec{w} d(x, y) = \iint_G (y + 2) d(x, y) \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (y + 2) dy dx = 4 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir substituieren $x = r\xi$, $dx = r d\xi$ und erhalten

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 4r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = 2\pi r^2.$$

20.9. Greensche Formeln: Seien G , ∂G , D wie vorher und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $g \in C^1(D, \mathbb{R})$. Dann gilt die 1. *Greensche Formel*:

$$\oint_{\partial G} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} ds = \iint_G \left(g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f \right) d(x, y).$$

Zum Beweis sei $\vec{w} := g \nabla f$ in 20.8. Man beachte $g \nabla f \cdot \vec{N} = g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}$ und

$$\operatorname{div} \vec{w} = \operatorname{div} (g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\operatorname{div} \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\Delta f)$$

(Produktregel aus 19.21).

Ende Di
20.06.23

Sind $f, g \in C^2(D, \mathbb{R})$, so gilt die 2. Greensche Formel:

$$\oint_{\partial G} \left(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) ds = \iint_G (g \Delta f - f \Delta g) d(x, y).$$

Zum Beweis subtrahiere von der 1. Greenschen Formel die Formel, in der die Rollen von f und g vertauscht sind.

Beispiel: (1) Seien $G, \partial G, D$ wie in 20.6 und $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$ in G und $u = 0$ auf ∂G . Mit $f = g = u$ in der ersten Greenschen Formel erhält man

$$\iint_G \nabla u \cdot \nabla u d(x, y) = 0.$$

Da $\nabla u \cdot \nabla u = \|\nabla u\|^2 \geq 0$ stetig in G ist, folgt $\|\nabla u(x, y)\| = 0$ für alle $(x, y) \in G$ und weiter $\nabla u(x, y) = \vec{0}$ für alle $(x, y) \in G$.

Mit der folgenden Bemerkung erhält man, dass u auf G konstant ist. Da u stetig ist, ist u auch auf \overline{G} konstant. Da nach Voraussetzung aber $u = 0$ auf $\partial G \subseteq \overline{G}$ ist, folgt $u = 0$ auf \overline{G} .

Bemerkung: Ist G ein Gebiet und $u \in C^1(G, \mathbb{R})$ mit $\nabla u = \vec{0}$ in G , so ist u auf G konstant.

Begründung: Zu je zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in G$ findet man eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\vec{\gamma}(0) = \vec{x}$ und $\vec{\gamma}(1) = \vec{y}$. Nach Beispiel 20.2(2) ist

$$u(\vec{y}) - u(\vec{x}) = u(\vec{\gamma}(1)) - u(\vec{\gamma}(0)) = \int_{\gamma} \nabla u \cdot d\vec{s} = 0.$$

Hat man ein $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$ in G und $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$ auf ∂G , so folgt genauso, dass u auf \overline{G} konstant ist, aber z.B. $u = 1$ ist auch eine Lösung.

Beispiel: (2) Seien $u, \varphi \in C^2(D, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \notin G$. Dann ist auch $\nabla \varphi(x, y) = \vec{0}$ für alle $(x, y) \notin \overline{G}$ somit $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} = 0$ auf ∂G . Aus der zweiten Greenschen Formel erhalten wir

$$\iint_G \varphi(\Delta u) d(x, y) = \iint_G u(\Delta \varphi) d(x, y)$$

(vergleiche partielle Integration).

21 Oberflächenintegrale und Integralsätze im \mathbb{R}^3

Wir beschäftigen uns zunächst mit Volumenintegralen im \mathbb{R}^3 bzw. gleich allgemein mit Integralen im \mathbb{R}^n (vgl. mit 20.5).

21.1. Integrale über Teilmengen von \mathbb{R}^n : Sei $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader im \mathbb{R}^n und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Man erklärt *Integrierbarkeit von f* und das *Integral von f über Q* ähnlich wie in 10.1 und 10.2 (HM I). Dabei muss man jedes der Intervalle $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, zerlegen:

$$a_j = z_{j,0} < z_{j,1} < \dots < z_{j,m(j)} = b_j,$$

und Supremum und Infimum von f auf den “kleinen” Quadern

$$\prod_{j=1}^n [z_{j,k(j)-1}, z_{j,k(j)}]$$

betrachten (hierbei ist $k(j) \in \{1, 2, \dots, m(j)\}$ für jedes $j = 1, 2, \dots, n$).

Ist f über Q integrierbar, schreibt man

$$\int_Q f(x_1, x_2, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

für das Integral und im Falle $n = 3$ auch

$$\iiint_Q f(x, y, z) d(x, y, z).$$

Satz: Ist Q wie oben und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über Q integrierbar und

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1,$$

wobei die einzelnen Integrationen rechts in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können.

Bemerkung: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Definition in 20.5 für Integrierbarkeit und Integral beschränkter Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt entsprechend (es ist nur “Rechteck R ” durch “Quader Q ” zu ersetzen; Integrierbarkeit und Integral sind unabhängig von dem Quader Q mit $B \subseteq Q$).

Der folgende Satz gilt analog auch in höheren Dimensionen.

21.2. Integration über projizierbare Teilmengen von \mathbb{R}^3 : Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ von der folgenden Form:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

wobei $g, h : B_0 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g \leq h$ und

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

mit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $u \leq v$.

Ist dann $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f über B integrierbar und es gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Bemerkung: (a) Die Rollen von x, y, z können vertauscht werden (vergleiche Satz 2 in 20.5).

(b) Für $f = 1$ erhält man das *Volumen* $\text{vol}(B)$ von B .

Beispiele: (1) Sei $r > 0$ und

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

(Kugel um $\vec{0}$ mit Radius r). Mit $a = -r, b = r, u(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, v(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, g(x, y) = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}, h(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ erhalten wir

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}} dz dy dx = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy dx.$$

Wir substituieren im inneren Integral $y = \sqrt{r^2 - x^2}\eta, dy = \sqrt{r^2 - x^2} d\eta$ und erhalten

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy = 2(r^2 - x^2) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} d\eta = \pi(r^2 - x^2).$$

Somit ist

$$\text{vol}(B) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

(2) Sei

$$B := \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Wir berechnen

$$\iiint_B 1 d(x, y, z) = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq z\}} 1 d(x, y) \right) dz.$$

Das innere Integral ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius \sqrt{z} . Dieser Kreis ist der Schnitt durch B mit festgehaltener z -Komponente. Wir erhalten somit

$$\iiint_B 1 d(x, y, z) = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung (Prinzip von Cavalieri): Für $B \subseteq \mathbb{R}^3$ der Form

$$B = \{(x, y, z) : z \in [a, b], (x, y) \in B(z)\}$$

gilt allgemein

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_a^b \int_{B(z)} d(x, y) dz.$$

Hierbei ist $B(z)$ der Schnitt durch B mit festgehaltener z -Komponente.

Bemerkung: Wir werden im folgenden über beschränkte Mengen im \mathbb{R}^3 integrieren, die sich ähnlich wie in Bemerkung 20.5(2) in endlich viele Gebiete der Form B (mit eventuell vertauschten Rollen der Koordinaten) zerlegen lassen. Wir nennen solche Mengen *Integrationsbereiche*.

21.3. Transformationsformel: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (meist ist $n = 2$ oder $n = 3$ und B ein Integrationsbereich) und $U \supseteq B$ ein Gebiet. Sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv mit $\det \Phi' \neq 0$ auf U , sowie $A := \Phi(B)$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Bemerkung: Nach 19.14 ist dann auch $V := \Phi(U)$ offen und $\Phi : U \rightarrow V$ bijektiv und in beiden Richtungen stetig differenzierbar. Da U ein Gebiet und $\det \Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gilt außerdem $\det \Phi' > 0$ auf U oder $\det \Phi' < 0$ auf U .

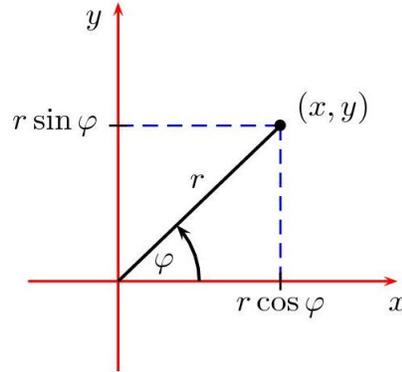
Satz: Es ist f integrierbar über A genau dann, wenn $f \circ \Phi |\det \Phi'(\cdot)|$ über B integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_A f(x) dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det (\Phi'(y))| dy.$$

Im einfachsten Fall ist $\Phi(y) = Cy + b$, wobei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Nach der “Interpretation” in 18.9 muss das Volumen eines Quaders $Q \subseteq B$ beim Abbilden mit Φ gerade mit $|\det (C)|$ multipliziert werden. Das ist die Kernidee hinter der Transformationsformel.

Ende Do
22.06.23

21.4. Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 : Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann findet man Winkel φ mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.



Für $\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ gilt

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi) = r$.

Damit Φ injektiv ist, nehme man etwa $U = (0, \infty) \times (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ mit $\tilde{\varphi}_1 < \tilde{\varphi}_2$ und $\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \leq 2\pi$. Sind $\tilde{\varphi}_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \tilde{\varphi}_2$, $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ und $A := \Phi(B)$, so gilt für stetiges $f: A \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Zusatz: Diese Formel gilt auch für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$, sowie für $R_1 = 0$.

Beispiele: (1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Hier ist $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, also $B = [1, 2] \times [0, \pi]$. Es gilt also für $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} \iint_A y\sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) &= \iint_B r \sin \varphi r r d(r, \varphi) = \int_0^\pi \int_1^2 r^3 \sin \varphi dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_1^2 r^3 dr = 2 \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

(2) Sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 - z, z \in [0, 4]\}$ und $A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &= \iiint_M 1 d(x, y, z) = \iint_A \left(\int_0^{4-(x^2+y^2)} 1 dz \right) d(x, y) \\ &= \iint_A 4 - (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\varphi = 8\pi. \end{aligned}$$

(3) Wir berechnen das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (das war in HM I nicht möglich). Dazu sei $R > 0$ und

$$K_R := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0, R] \times [0, R]$$

und $\rho := \sqrt{2}R$, sowie $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$ auf \mathbb{R}^2 .

Dann gilt

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y),$$

$$\iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) = \iint_{Q_R} (e^{-x^2} e^{-y^2}) d(x, y) = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

und genauso

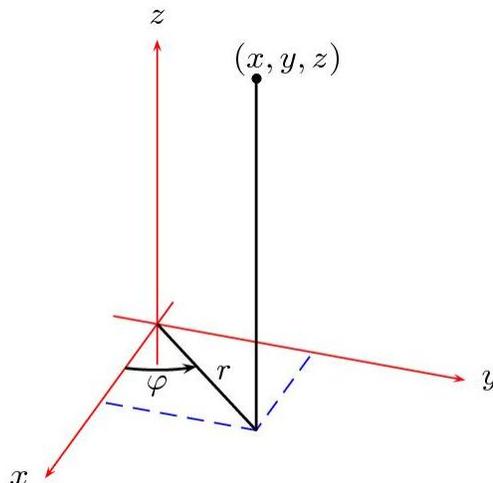
$$\iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-\rho^2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Wir lassen nun $R \rightarrow \infty$ und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

21.5. Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3 : Hier ist $\Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $x = r \cos \varphi$,

$y = r \sin \varphi$ und $z = z$.



Es gilt

$$\Phi'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi, z) = r$. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in 21.3 und stetiges $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gilt somit:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Der Zusatz aus 21.4 gilt sinngemäß auch hier.

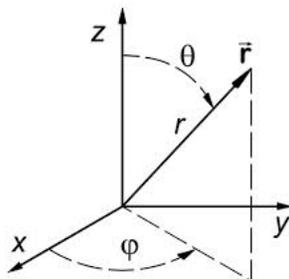
Beispiel: $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \in [0, 1]\}$, also $B = [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 1]$.
Dann ist für $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$:

$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + y^2 + yz) d(x, y, z) &= \iiint_B (r^2 + zr \sin \varphi) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (r^2 + zr \sin \varphi) r dz d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \left[zr^3 + \frac{z^2}{2} r^2 \sin \varphi \right]_{z=0}^{z=1} d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^3 + \frac{r^2}{2} \sin \varphi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} r^3 + \frac{r^2}{2} [-\cos \varphi]_0^{\pi/4} dr = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

21.6. Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3 : Man schreibt $r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

wobei $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\vartheta \in [0, \pi]$.



Es ist

$$\Phi'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

also $\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) = -r^2 \sin \vartheta$ und $|\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta)| = r^2 \sin \vartheta$.

Sind A und B wie in 21.3, also $A = \Phi(B)$, und ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta d(r, \varphi, \vartheta).$$

Der Zusatz in 21.4 gilt entsprechend.

Beispiel: Sei $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$. Dann ist $B = [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, und für $f(x, y, z) = x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \iiint_A x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \iiint_B r \cos \varphi \sin \vartheta \cdot r \cdot r^2 \sin \vartheta d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos \varphi \sin^2 \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^1 r^4 dr \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}_{=1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta d\vartheta}_{=\pi/4} = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

EndeMo
26.06.23

21.7. Flächendarstellungen im \mathbb{R}^3 : Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Flächen im \mathbb{R}^3 darzustellen.

Explizite Darstellung: $z = f(x, y)$, z.B. $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} : (x, y) \in U \right\},$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Implizite Darstellung: $F(x, y, z) = 0$, z.B. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D : F(x, y, z) = 0 \right\},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ Gebiet und $F \in C^1(D, \mathbb{R})$. Hierbei sei $\nabla F(x, y, z) \neq \vec{0}$ für $(x, y, z) \in \mathcal{F}$. Diese Bedingung sorgt dafür, dass man lokal immer nach einer der Variablen x , y oder z auflösen kann (vgl. 19.15).

Parameterdarstellung: Beispiel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} : \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi) \right\},$$

allgemein

$$\mathcal{F} = \{\vec{g}(u, v) : (u, v) \in U\},$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet und $\vec{g} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ **injektiv** ist mit $\text{Rang } \vec{g}'(u, v) = 2$ für alle $(u, v) \in U$ (beachte $\vec{g}'(u, v) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$). Ein solches \mathcal{F} heißt *reguläres Flächenstück im \mathbb{R}^3* und \vec{g} heißt *reguläre Parametrisierung* von \mathcal{F} .

Bemerkung: Durch $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ kommt man von einer expliziten zu einer impliziten Darstellung. Die explizite Darstellung ist ein Spezialfall der Parameterdarstellung via

$$\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in U.$$

Normaleneinheitsvektor: Ist \mathcal{F} ein reguläres Flächenstück im \mathbb{R}^3 , so gibt es in jedem Punkt auf der Fläche genau zwei Vektoren, die auf der Fläche senkrecht stehen und die Länge 1 haben. Sie sind entgegengesetzt gerichtet und heißen *Normaleneinheitsvektor*. Die Entscheidung für einen der beiden legt die *Orientierung des Flächenstücks* fest.

Häufig wird verlangt, dass \vec{N} “nach außen” zeigt, was aber voraussetzt, dass es überhaupt “innen” und “außen” gibt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall.

Im folgenden betrachten wir \vec{N} als Abbildung $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

In Parameterdarstellung ist

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \pm \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|}, \quad (u, v) \in U.$$

Wir verwenden, wenn nichts anderes gesagt wird, hier das **positive** Vorzeichen.

In impliziter Darstellung $F(x, y, z) = 0$ ist der Normaleneinheitsvektor

$$\vec{N}(x, y, z) = \pm \frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{F}$$

(beachte, dass man statt F ebenso $-F$ verwenden kann). Das liegt daran, dass der Gradient von F senkrecht auf der Niveaufäche steht (vgl. 19.12).

Für die explizite Darstellung $z = f(x, y)$ erhalten wir

$$\vec{N}(x, y, f(x, y)) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in U$$

(beachte, dass $\partial_x \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}$, $\partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}$ und $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$ ist).

21.8. Oberflächenintegral: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre (insbesondere also injektive) Parametrisierung eines Flächenstücks. Dann heißt

$$do := \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v)$$

skalares Oberflächenelement, und

$$d\vec{o} := \partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) d(u, v)$$

heißt *vektorielles Oberflächenelement* des durch \vec{g} parametrisierten regulären Flächenstücks.

Definition: Sei $B \subseteq U$ ein Integrationsbereich und $\mathcal{F} := \vec{g}(B)$. Für ein stetiges Skalarfeld $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das (*Oberflächen-*)Integral von f über \mathcal{F} durch

$$\iint_{\mathcal{F}} f do := \iint_B f(\vec{g}(u, v)) \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v),$$

und für ein stetiges Vektorfeld $\vec{w} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ setzt man

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} := \iint_B \vec{w}(\vec{g}(u, v)) \cdot (\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)) d(u, v).$$

Für $f = 1$ erhält man den *Flächeninhalt* von \mathcal{F} :

$$A(\mathcal{F}) := \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_B \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v).$$

Bemerkung: Die Definitionen sind invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

Bemerkung: Wenn wir das vektorielle Oberflächenelement mit dem skalaren Oberflächenelement vergleichen und – wie in 21.7 gesagt – für \vec{N} das positive Vorzeichen nehmen, dh

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|},$$

so ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N} do,$$

das ist der **Fluss** des Vektorfelds \vec{v} durch die mittels \vec{N} orientierte Fläche \mathcal{F} .

Beispiel: Wir berechnen den Flächeninhalt einer oberen Halbkugel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

mit Radius $R > 0$. Wir haben eine explizite Darstellung mit $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Es ist $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $-\partial_x f = x/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $-\partial_y f = y/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Wir setzen $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Somit ist

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}) &= \iint_B \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}} r dr d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi R^2 \left[-\sqrt{1 - \rho^2} \right]_0^1 = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

21.9. Der Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3 : Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks $\mathcal{F}^* := \vec{g}(U)$.

Sei G ein Gebiet so, dass $\overline{G} \subseteq U$ ein Integrationsbereich ist. Der Rand ∂G von G bestehe aus endlich vielen regulären Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, dh $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ (im Sinne von Bemerkung 20.1(d)) ist geschlossen und doppelpunktfrei und hat ∂G als Spur. Die Orientierung von γ sei so, dass G "links von γ liegt" (dh ∂G ist *positiv orientiert*).

Sei $\mathcal{F} := \vec{g}(\overline{G})$. Dann ist $\partial \mathcal{F} := \vec{g}(\partial G)$ parametrisiert durch $\vec{g} \circ \gamma$.

Satz: Ist nun $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $\mathcal{F} \cup \partial \mathcal{F} \subseteq V$ und $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld, so gilt

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Ende Di
27.06.23

Nach 20.2 können wir die linke Seite auch schreiben als

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{T} ds,$$

wobei $\vec{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Tangenteneinheitsvektor ist, hier gegeben durch

$$\vec{T}(\vec{g}(\gamma(t))) = \frac{\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{\|\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\|},$$

und die rechte Seite können wir schreiben als

$$\iint_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{v}) \cdot \vec{N} \, d\sigma.$$

Alternativ: Ist \vec{T} auf $\partial\mathcal{F}$ gegeben (und damit die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ festgelegt), so sei im Punkt $P \in \partial\mathcal{F}$ der Vektor \vec{n} der Vektor der Länge 1, der in der Tangentialebene an \mathcal{F} in P senkrecht auf \vec{T} steht und ins Äußere von \mathcal{F} weist. Die Richtung von \vec{N} ist dann diejenige von $\vec{n} \times \vec{T}$.

Anders ausgedrückt: Die Orientierung von \vec{N} auf \mathcal{F} ergibt sich aus der Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ im Sinne der ‘‘Rechtsschraubenregel’’. Man vergleiche hierzu auch die ebene Version des Stokesschen Integralsatzes in 20.7!

Beispiele: (1) Sei $\mathcal{F} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Dann ist $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. Orientieren wir $\partial\mathcal{F}$ durch $\vec{T}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir $\vec{N}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für $(x, y, z) \in \mathcal{F}$.

Wir wollen

$$J := \iint_{\mathcal{F}} (\text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}$$

berechnen, wobei $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sei.

Nach dem Stokesschen Satz ist

$$J = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\cos t, \sin t, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Für $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + z \\ z - x \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$J = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Hier ist übrigens $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) Sei G ein Integrationsbereich im \mathbb{R}^2 mit einer aus endlich vielen regulären Kurven zusammengesetzten doppelpunktfreien Randkurve. Dann gilt für die Fläche $A(G)$ von G :

$$A(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}.$$

(Man brette G in den \mathbb{R}^3 ein und beachte $\vec{N} = \vec{e}_3$ und $\left(\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{e}_3 = 2$.)

(3) Anwendung von (2): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$G = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in (\alpha, \beta), r \in (0, r(t))\}.$$

Dann gilt die Leibnizsche Sektorformel:

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 dt.$$

(Die Integrale über die Strecken $[(0, 0), (r(\alpha) \cos \alpha, r(\alpha) \sin \alpha)]$ und $[(0, 0), (r(\beta) \cos \beta, r(\beta) \sin \beta)]$ verschwinden, das Integral über $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos t \\ r(t) \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [\alpha, \beta]$ rechne man aus.)

21.10. Der Divergenzsatz im \mathbb{R}^3 : Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränkter und abgeschlossener Integrationsbereich und $G := B \setminus \partial B$ ein Gebiet mit $\partial G = \partial B$ (dann ist $\overline{G} = B$). Der Rand ∂G lasse sich zerlegen in endlich viele reguläre Flächenstücke. Die Einheitsnormale \vec{N} auf ∂G sei ins Äußere von G gerichtet.

Satz: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $\overline{G} \subseteq V$ und $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_G (\operatorname{div} \vec{v}) d(x, y, z) = \iint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} do.$$

Beispiele: (1) Für $\vec{v} \in C^2(V, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\iint_{\partial G} (\operatorname{rot} \vec{v}) \cdot d\vec{o} = 0,$$

da ja $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$ in G . Nach 21.9 ist das nicht verwunderlich, da die Oberfläche ∂G von G ja *geschlossen* ist und selbst keinen (Flächen-)Rand hat.

(2) Für $f \in C^2(V)$ gilt

$$\iiint_G \Delta f d(x, y, z) = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot \vec{N} do = \iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} do.$$

(3) **Greensche Formeln** Für $f, g \in C^2(V, \mathbb{R})$ und $h \in C^1(V, \mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G} h \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} do &= \iiint_G (h \Delta f + \nabla h \cdot \nabla f) d(x, y, z), \\ \iint_{\partial G} \left(g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) do &= \iiint_G (g \Delta f - f \Delta g) d(x, y, z). \end{aligned}$$

(4) Setzt man $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$, so gilt $\operatorname{div} \vec{v} = 3$, und wir erhalten

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{N} do.$$

Für $G = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| < R\}$ ist also wegen $\vec{N} = \vec{x}/\|\vec{x}\|$:

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \|\vec{x}\| do = \frac{R}{3} \underbrace{A(\partial G)}_{=4\pi R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

(5) Wir setzen $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ und $\vec{v} = \nabla f$. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= \left(-\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \cdot (2x_j) \right)_j = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \\ \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) &= -\sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} - 3 \frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^5} \right) = 0 \end{aligned}$$

für $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Nach dem Divergenzsatz ist also für G mit $0 \notin \bar{G}$:

$$\iint_{\partial G} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Wir halten außerdem fest, dass

$$\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(6) Wir schreiben hier statt $d(x_1, x_2, x_3)$ auch $d\vec{x}$, wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ die Integrationsvariable ist. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $\varphi = 0$ außerhalb einer Kugel G um $\vec{0}$ mit Radius R . Wir wollen

$$\iiint_G \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi d\vec{x} = -4\pi \varphi(\vec{0})$$

zeigen. Da der Integrand für $\vec{x} \rightarrow 0$ nicht beschränkt bleiben muss, verstehen wir unter der linken Seite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi d\vec{x},$$

wobei $G_\varepsilon := G \setminus \{\|\vec{x}\| \leq \varepsilon\}$. Für festes $\varepsilon \in (0, R)$ ist jetzt nach der zweiten Greenschen Formel und nach (5):

$$\iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi d\vec{x} = \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} d\sigma - \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} d\sigma.$$

Dabei beachte man, dass für $\|\vec{x}\| = \varepsilon$ gilt: $\vec{N} = -\vec{x}/\varepsilon$. Also ist

$$-\iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} d\sigma = -\varepsilon^{-2} \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi d\sigma \rightarrow -4\pi \varphi(0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Andererseits ist $\|\nabla \varphi\| \leq K$ für eine geeignete Konstante K und daher

$$\left| \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} d\sigma \right| \leq \frac{4\pi \varepsilon^2}{\varepsilon} K \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Interpretation: Es gilt " $\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = -4\pi \delta_{\vec{0}}$ ", wenn wir gegen C^2 -Funktionen ϕ integrieren, die außerhalb einer Kugel $G = K(\vec{0}, R)$ verschwinden. Dabei setzt man für solche ϕ :

$$\iiint_G \left(\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right) \phi d\vec{x} := \iiint_G \frac{1}{\|\vec{x}\|} (\Delta \phi) d\vec{x},$$

was durch die zweite Greensche Formel in (3) oben gerechtfertigt ist (die Randterme verschwinden), und definiert außerdem

$$\iiint_G \phi \delta_{\vec{0}} d\vec{x} := \phi(\vec{0}),$$

dh $\delta_{\vec{0}}$ ist formal als eine "Dichte" mit Integral 1 zu verstehen, die im Punkt $\vec{0}$ konzentriert ist.

Bemerkung: Ähnlich kann man im \mathbb{R}^2 zeigen, dass für $g(x, y) := -\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$ gilt: $\Delta g = \delta_{(0,0)}$.

21.11. Satz über Parameterintegrale: Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $B \subseteq V$ ein Integrationsbereich (insbesondere ist also B abgeschlossen und beschränkt). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \times V, (t, \vec{x}) \mapsto f(t, \vec{x})$, sei stetig und stetig partiell nach t differenzierbar. Dann ist die Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) := \int_B f(t, \vec{x}) d\vec{x}$, nach t stetig differenzierbar und

$$g'(t) = \int_B \partial_t f(t, \vec{x}) d\vec{x} \quad \text{für jedes } t \in I.$$

Ist $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nur stetig, so ist $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Diese Aussagen gelten auch für komplexwertige Funktionen.

Beweis. ³ Wir zeigen die Differenzierbarkeit. Der Beweis für die Stetigkeit ist ähnlich. Sei $t \in I$ fest und $h \neq 0$ mit $|h|$ klein. Dann gilt nach dem Hauptsatz aus HM1:

$$\begin{aligned} I(h) &:= \frac{g(t+h) - g(t)}{h} - \int_B \partial_t f(t, \vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_B \frac{f(t+h, \vec{x}) - f(t, \vec{x})}{h} - \partial_t f(t, \vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_B \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \partial_t f(\tau, \vec{x}) - \partial_t f(t, \vec{x}) d\tau d\vec{x}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$|I(h)| \leq \int_B 1 d\vec{x} \cdot \max_{\vec{x} \in B, \tau \in [t-|h|, t+|h|]} |(\partial_t f)(\tau, \vec{x}) - (\partial_t f)(t, \vec{x})|.$$

Dabei geht das Maximum für $h \rightarrow 0$ gegen Null. Sonst gäbe es nämlich ein $c > 0$ und Folgen (τ_n) mit $\tau_n \rightarrow t$ und (\vec{x}_n) in B mit

$$a_n := |(\partial_t f)(\tau_n, \vec{x}_n) - (\partial_t f)(t, \vec{x}_n)| \geq c$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da B abgeschlossen und beschränkt ist, finden wir eine Teilfolge $(\vec{x}_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_{k(n)} \rightarrow \vec{x}_0 \in B$. Aufgrund der Stetigkeit von $\partial_t f$ haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_t f)(\tau_{k(n)}, \vec{x}_{k(n)}) = (\partial_t f)(t, \vec{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_t f)(t, \vec{x}_{k(n)}),$$

also $a_{k(n)} \rightarrow 0$ im Widerspruch zu $a_{k(n)} \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

21.12. Anwendung (Herleitung der Wärmeleitungsgleichung): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir betrachten Wärmeleitung in Ω und eine Funktion $u = u(\vec{x}, t)$, wobei $t \in [0, T]$ und $\vec{x} \in \Omega$, welche die Temperaturverteilung beschreibt. Wir setzen voraus, dass das Medium in Ω homogen ist. Für jedes Gebiet $G \subseteq \Omega$ ist dann

$$\iiint_G u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x})$$

³Nicht in der Vorlesung.

proportional zur Wärmeenergie in G . Energieerhaltung bedeutet also für ein glattes Gebiet G :

$$\frac{d}{dt} \iiint_G u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) = - \underbrace{\iint_{\partial G} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{N}(\vec{x}) d\sigma(\vec{x})}_{\text{Wärmetransport durch } \partial G} + \underbrace{\iiint_G f(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x})}_{\text{Wärmequellen in } G},$$

wobei $\vec{j}(\vec{x}, t)$ der Vektor des Wärmeflusses sei. Wenn u glatt genug ist, kann man nach 21.11 links Integral und $\frac{d}{dt}$ vertauschen und erhält mit dem Divergenzsatz:

$$\iiint_G \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) = - \iiint_G \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) + \iiint_G f(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}).$$

Da $G \subseteq \Omega$ sonst beliebig ist, geht dies nur, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = -\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) \quad \text{für alle } (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Fouriers Gesetz besagt nun

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -c \nabla u(\vec{x}, t) \quad \text{für ein } c > 0,$$

dh dass sich die Wärme in Richtung des größten Temperaturgefälles ausbreitet und betragsmäßig proportional zur Länge des Gradienten $\nabla u(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}(\vec{x}, t)$ ist. Zusammen ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = c \Delta u(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) \quad \text{für alle } (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T),$$

wobei sich $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nur auf die räumlichen Variablen bezieht.

22 Grundzüge der Funktionentheorie

22.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *komplex differenzierbar*, wenn der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in \mathbb{C} existiert. In diesem Fall heißt $f'(z_0)$ die *komplexe Ableitung von f in z_0* .

Die Funktion f heißt *holomorph* in G , falls f in **jedem** $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung: Ist f in G holomorph, so ist f in G stetig.

Beispiele: (a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 1$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $f(z) = z$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $f'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) $f(z) = e^z$ ist holomorph auf \mathbb{C} mit $f'(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

22.2. Rechenregeln: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ in G holomorph. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ in G holomorph und

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \quad \text{für alle } z \in G.$$

Ist $g \neq 0$ in G , so ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph in G und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}, \quad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner $\neq 0$ ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit. Ebenso gilt die Kettenregel auch für die komplexe Differenzierbarkeit. [Die Beweise lassen sich übertragen.]

EndeMo
03.07.23

Beispiele: (1) $z \mapsto f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf \mathbb{C} mit $f'(z) = nz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Jedes Polynom P mit komplexen Koeffizienten ist auf \mathbb{C} holomorph.

(2) $z \mapsto f(z) = z^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f'(z) = -nz^{-n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jede rationale Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P, Q komplexe Polynome sind, ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

(3) $z \mapsto f(z) = e^{1/z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $f'(z) = e^{1/z}(-z^{-2})$ für $z \neq 0$.

22.3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, und wir können G als offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 betrachten. Durch $u(x, y) := (\operatorname{Re} f)(x + iy)$ und $v(x, y) = (\operatorname{Im} f)(x + iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy \in G$ erhält

man eine Funktion $G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$, die man mit den Methoden von Kapitel 19 (mehrdimensionale Differentialrechnung) behandeln kann.

Ist f in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar, so sieht man anhand der Definition (mit $x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0$):

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Betrachtet man $x_0 + iy \rightarrow x_0 + iy_0$, erhält man

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0),$$

so dass im Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-Dgln)* für u und v , die also auf G erfüllt sind, wenn f holomorph auf G ist. Umgekehrt gilt der

Satz: Ist $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ eine C^1 -Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ definierte Funktion in G holomorph.

Bemerkung: Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation von $x + iy$ mit der komplexen Zahl $a + ib$ entspricht der Multiplikation des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (vgl. auch Beispiel 7) in 16.8). In diesem Sinne entspricht $f'(z_0)$ der Matrix $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$. Die Ableitung im Sinne von Kapitel 19 (dh die Jacobimatrix) von $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ ist hingegen $\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$. Beim Vergleich erhält man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beispiel: Für die Funktion $f(z) = \bar{z}$ gilt $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Die Funktion ist also nicht holomorph.

22.4. Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch die Potenzreihe gegebene Funktion

$$f : K(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

holomorph in $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ (beachte $K(z_0, \infty) = \mathbb{C}$), und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R.$$

Beispiele: Die Funktionen $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$, $z \mapsto \sinh z$, $z \mapsto \cosh z$ sind auf \mathbb{C} holomorph.

22.5. Komplexe Kurvenintegrale: Eine *Kurve* ist hier eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, für die es $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so gibt, dass γ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, stetig differenzierbar ist. Die Kurve γ heißt *einfach geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und γ auf $[a, b)$ injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.

Dabei heißt γ in $t_* \in [a, b]$ differenzierbar, falls der Limes

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}$$

in \mathbb{C} existiert.

Bemerkung: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ differenzierbar. Dann ist $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t), \quad t \in [a, b].$$

Definition: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve und $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei die rechte Seite als $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ zu verstehen ist, wenn t_0, \dots, t_n wie oben in der Definition sind.

Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen und ändert das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

Abschätzung: Sind f und γ wie in der Definition, so gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet (siehe 19.6).

Wichtiges Beispiel: Sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$. Dann ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, und es gilt $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sei $f(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} ir e^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n = -1$ ist das Kurvenintegral also $= 2\pi i$. Für $n \neq -1$ erhalten wir

$$= ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

da $e^{2\pi i(n+1)} = 1$. Wir bemerken, dass f für $n \geq 0$ auf \mathbb{C} holomorph ist und für $n < 0$ nur auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist.

22.6. Cauchyscher Integralsatz: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für jede einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Für den Begriff *einfach zusammenhängend* siehe 20.3, z.B. sind konvexe oder sternförmige Gebiete einfach zusammenhängend. Dabei heißt $G \subseteq \mathbb{C}$ *konvex*, falls zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}$ in G enthalten ist. Ende Di 04.07.23

Beispiel: Damit ist das Integral im Beispiel von 22.5 $= 0$ für $n \geq 0$.

Bemerkungen zum Beweis: Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage äquivalent ist zur Existenz einer holomorphen Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ auf G (es ist dann nämlich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

vergleiche mit 20.4, wo die Situation ähnlich ist).

Ist G konvex, so erhält man ein solches F , indem man $z_* \in G$ fixiert und $F(z) := \int_{S[z_*, z]} f(w) dw$ setzt. Gilt der Satz für "Dreiecke" γ , so hat man für $z, z_0 \in G$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{S[z_0, z]} (f(w) - f(z_0)) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \max\{|f(w) - f(z_0)| : w \in S[z_0, z]\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $z \rightarrow z_0$, da f in z_0 stetig ist.

Es reicht deshalb, die Aussage für “Dreiecke” γ zu zeigen (Satz von Cauchy-Goursat).

Beispiele: (1) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $\int_{\gamma} z^n dz = 0$, da f auf \mathbb{C} holomorph ist, \mathbb{C} konvex ist und γ einfach geschlossen.

(2) Sei γ wie eben und $f(z) = e^z$. Nach denselben Argumenten wie in (1) ist $\int_{\gamma} e^z dz = 0$.

(3) $f(z) = 1/z$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, aber $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

22.7. Cauchysche Integralformel: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z_0 , welches “innerhalb von γ ” liegt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweisidee: Man überlegt sich, dass 22.6 auch noch gilt, wenn die Funktion auf G stetig und in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Diese Variante von 22.6 wendet man auf die Funktion $z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ an und beachtet das Beispiel aus 22.5 für $n = -1$, wobei hier wegen 22.6 nur wichtig ist, dass z_0 von γ einmal umlaufen wird:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz}_{=1}.$$

Beispiele: (1) Die Anwendung auf $f(z) = 1$ gibt das Ergebnis von 22.5 im Fall $n = -1$ (man nehme $z_0 = 0$).

(2) Nimmt man $f(z) = e^z$ und $z_0 = 0$, sowie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so erhält man

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

22.8. Folgerungen: (a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar. Unter den Voraussetzungen von 22.7 gilt

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b): Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist G offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subseteq G$. Die Reihe konvergiert dabei absolut und für jedes $\rho \in (0, R)$ auf $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ gleichmäßig.

Beweis. (a) Man differenziere die rechte Seite von 22.7 direkt, wobei γ einen Kreis um z_0 mit Radius ρ parametrisiere. Für $|z - z_0| \leq \rho/2$ hat man dann

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left(\frac{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}}{z - z_0} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right) d\zeta \\ &= (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| &\leq |z - z_0| \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{2}{\rho^3} \cdot \max\{|f(\zeta)| : |\zeta - z_0| = \rho\} \\ &\leq M|z - z_0| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0), \end{aligned}$$

wobei die Konstante $M \in (0, \infty)$ von ρ und f abhängt. Unter Verwendung von 22.6 erhält man die Formel für $k = 1$. Dieses Vorgehen kann man iterieren.

(b) Verwende die Formel in 22.7, wobei γ der Kreis um z_0 mit Radius ρ ist und $\{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subseteq G$ gilt. Entwickle für ζ auf γ den Integranden in eine geometrische Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Nun vertausche man Integration und Reihe (für $|z - z_0| \leq \rho < R$ konvergiert die Reihe gleichmäßig) und verwende die Formel in (a). \square

22.9. Satz von Liouville: Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis. Es gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir schreiben nach 22.8:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dabei haben wir für $r > 0$ nach 22.8, falls $\partial K(0, r)$ durch γ parametrisiert ist:

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für $r \rightarrow \infty$ erhält man $a_k = 0$, wenn $k \geq 1$. \square

Anwendung: Jedes komplexe Polynom P vom Grad $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in \mathbb{C} (Fundamentalsatz der Algebra). Ende Do
06.07.23

Beweis. Es gilt $|P(z)| \rightarrow \infty$ für $|z| \rightarrow \infty$. Hat P keine Nullstelle in \mathbb{C} , so ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := 1/P(z)$, holomorph mit $f(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$. Insbesondere ist f beschränkt und damit konstant. Dann ist aber auch P konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

22.10. Identitätssatz: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G , so gilt $f = g$ auf G .

Beweis. Ohne Einschränkung sei $g = 0$. Wir finden $z_0 \in G$ und eine Folge (z_n) in $G \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ und $f(z_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in einer Umgebung von z_0 und nehmen an, es gäbe ein minimales $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $a_m \neq 0$. Dann hätten wir für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = f(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-m} \rightarrow a_m \quad (n \rightarrow \infty)$$

im Widerspruch zu $a_m \neq 0$. Folglich ist $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $f = 0$ auf einer Kreisscheibe um z_0 .

Verbinde nun ein beliebiges $z \in G$ mit z_0 durch einen Streckenzug in G und wiederhole das Argument entlang des Streckenzugs. \square

22.11. Laurententwicklung: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von f . Es gibt dann eindeutig bestimmte Koeffizienten a_k , $k \in \mathbb{Z}$, derart, dass gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subseteq G$. Konvergenz der Reihe ist zu verstehen als Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$ (*Hauptteil* der Reihe) und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ (*Nebenteil* der Reihe). Die Reihe konvergiert dabei absolut und für alle $0 < \rho_0 < \rho_1 < R$ auf $\{z : \rho_0 \leq |z - z_0| \leq \rho_1\}$ gleichmäßig. Der Koeffizient a_{-1} heißt *Residuum von f in z_0* , geschrieben

$$\text{res}(f; z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität z_0 von f heißt *hebbare Singularität*, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, *Pol n -ter Ordnung*, falls $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -n$ ist, und *wesentliche Singularität* sonst.

Beweisidee zur Laurententwicklung: Nur für $z_0 = 0$. Ist $0 < \rho_0 < |z| < \rho_1 < R$, so gilt wegen 22.7:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: f_1(z) - f_0(z),$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \rightarrow G$, $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$. Die Funktionen $f_1(z)$ und $f_0(\frac{1}{z})$ lassen sich in Potenzreihen um 0 entwickeln, die für $|z| < \rho_1$ bzw. $|z| < 1/\rho_0$ konvergieren. Diese Potenzreihen ergeben Neben- und Hauptteil der Laurentreihe.

Beispiele: (1) $f(z) = z^{-n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, hat in $z_0 = 0$ einen Pol n -ter Ordnung. Dabei gilt $\text{res}(z^{-1}; 0) = 1$ und $\text{res}(z^{-n}; 0) = 0$ für $n \geq 2$.

(2) $f(z) = e^{2/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Wegen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^{-k}}{k!}$ für $z \neq 0$ gilt $\text{res}(f; 0) = 2$.

(3) $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol erster Ordnung. Für $0 < |z-1| < 2$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2(z-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z-1)^k,$$

also $\text{res}(f; 1) = \frac{1}{2}$.

Bemerkung (ohne Beweis): Sei z_0 isolierte Singularität von f . Dann gilt:

$$z_0 \text{ ist hebbar} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existiert} \iff |f(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow z_0,$$

$$z_0 \text{ ist Polstelle} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

$$f \text{ hat in } z_0 \text{ einen Pol der Ordnung } n \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = \infty \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \text{ und } |(z - z_0)^n f(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Man kann also schon an $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$, $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ sehen, dass $z \mapsto e^{1/z}$ in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität hat.

EndeMo
10.07.23

22.12. Residuensatz: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien $z_1, z_2, \dots, z_m \in G$ verschieden und innerhalb von γ , und sei $f : G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{res}(f; z_j).$$

Beweis. Mithilfe von 22.6 ist das Kurvenintegral links

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz,$$

wobei γ_j jeweils ein kleiner Kreis um z_j ist, so dass man die Laurententwicklung von f um z_j verwenden kann. Dann vertauscht man Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz!) und verwendet das Beispiel in 22.5. \square

22.13. Berechnung von Residuen: (a) Besitzt f in z_0 einen höchstens n -fachen Pol ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right) \right) \Big|_{z=z_0}.$$

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad g(z) := (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k$$

für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0 . Vergleich mit der Potenzreihe von $g(z)$ ergibt $a_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$. \square

(b) Ist $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist z_0 einfache Nullstelle von $h(z)$, also ist z_0 hebbare Singularität von $(z - z_0)f(z)$. Damit ist z_0 einfache Polstelle von f und (a) ergibt die angegebene Formel. \square

Beispiele: (1) Sei $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Da $z \mapsto z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ einfache Nullstellen in i und $-i$ hat, hat f einfache Polstellen in i und $-i$. Wir erhalten

$$\operatorname{res}(f; i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}(f; -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = -\frac{1}{2i}.$$

Ist also $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}(f; i) + \operatorname{res}(f; -i)) = 0.$$

(2) Für γ aus (1), aber $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ erhält man

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 2\pi i \sin 1.$$

22.14. Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien $P(z), Q(z)$ komplexe Polynome mit $\text{Grad } P < \text{Grad } Q = n \geq 2$. Dann existieren *verschiedene* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ und

$$Q(z) = \mu(z - \lambda_1)^{k_1} \cdot (z - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_m)^{k_m},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. [Die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sind die *verschiedenen* komplexen Nullstellen von $Q(z)$ und k_1, k_2, \dots, k_m deren jeweilige Vielfachheiten.] Es gibt dann eindeutig bestimmte komplexe Koeffizienten $\alpha_l^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$) so, dass

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{z - \lambda_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(z - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(z - \lambda_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(2)}}{z - \lambda_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(z - \lambda_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(z - \lambda_2)^{k_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(m)}}{z - \lambda_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(z - \lambda_m)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(z - \lambda_m)^{k_m}}. \end{aligned}$$

M.a.W. $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ist eine Linearkombination der Funktionen $\frac{1}{(z-\lambda_j)^l}$ ($j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$). Für die Koeffizienten höchster Ordnung hat man etwa

$$\alpha_{k_j}^{(j)} = \lim_{z \rightarrow \lambda_j} (z - \lambda_j)^{k_j} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Beispiel:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

Hier sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, k_1 = k_2 = k_3 = 1$ und

$$A = \frac{1}{(0-i)(0+i)} = 1, \quad B = \frac{1}{i(i+i)} = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{-i(-i-i)} = -\frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+i}.$$

22.15. Logarithmus und allgemeine Potenz: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann man schreiben als $z = |z|e^{i\varphi}$. Dabei heißt φ *Argument* von z , geschrieben $\arg z$. Das Argument ist **nicht eindeutig**: Ist φ ein Argument von z , so auch $\varphi + 2k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Der *Hauptzweig des Arguments* $\text{Arg } z$ nimmt für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ Werte in $(-\pi, \pi)$ an.

Definition: Der *Hauptzweig Log des Logarithmus* ist gegeben durch

$$\text{Log } z := \ln |z| + i\text{Arg } z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Andere Zweige des Logarithmus erhält man, indem man andere Zweige des Arguments betrachtet.

Bemerkung: $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : |\text{Im } w| < \pi\}$ ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung \exp . Es gilt

$$\text{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allgemeine Potenz: Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$$

den *Hauptzweig* der α -ten Potenz. Die Funktion $z \mapsto z^\alpha$ ist dann auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph. Nimmt man andere Zweige des Logarithmus, so erhält man andere Zweige der α -ten Potenz.

Wurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man für den Hauptzweig der n -ten Wurzel

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp(i\text{Arg } z/n), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Berücksichtigt man die anderen Werte des Arguments, so sieht man, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n -te Wurzeln besitzt.

22.16. Satz von der Gebietstreue und Maximumsprinzip: (a) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat $z \mapsto |f(z)|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.

Ende Di
11.07.23

22.17. Konforme Abbildungen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine injektive holomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist *winkeltreu*: Sind $\gamma, \psi : [-1, 1] \rightarrow G$ stetig differenzierbare reguläre Kurven mit $\gamma(0) = z_0 = \psi(0)$, die sich in z_0 im Winkel φ schneiden, so schneiden sich die Bildkurven $f \circ \gamma$ und $f \circ \psi$ in $f(z_0)$ ebenfalls im Winkel φ .

Solche Abbildungen heißen auch *konform*. [Man kann zeigen, dass Injektivität von $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ die Bedingung $f' \neq 0$ auf G impliziert.]

Anwendung: In der zweidimensionalen Elektrostatik schneiden sich Feldlinien und Äquipotentiallinien im rechten Winkel. Diese Beziehung bleibt unter konformen Abbildungen erhalten.

22.18. Möbiustransformationen: Sind $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$, so bilden die holomorphen Funktionen $z \mapsto az$ (Drehstreckung) und $z \mapsto z+b$ (Translation) die komplexe Zahlenebene bijektiv auf sich selbst ab. Außerdem werden Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abgebildet.

Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ (Inversion) bildet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv auf sich selbst ab. Geraden durch Null werden auf Geraden durch Null abgebildet; Kreise durch Null werden auf Geraden, die nicht durch Null gehen, abgebildet (und umgekehrt); Kreise, die nicht durch Null gehen, werden auf Kreise, die nicht durch Null gehen, abgebildet.

Idee: Man schreibe Geraden- und Kreisgleichung geeignet um.

Es ist hier sinnvoll, zur komplexen Ebene \mathbb{C} einen Punkt ∞ hinzuzunehmen und $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu betrachten, wobei man setzt $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$. Außerdem bezeichnet man Kreise und Geraden als *verallgemeinerte Kreise*.

Definition: Eine Möbiustransformation T hat die Form $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$.

Eigenschaften:

- (1) Jede Möbiustransformation bildet $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ ab.
- (2) Jede Möbiustransformation lässt sich schreiben als Hintereinanderausführung von Drehstreckungen, Translationen und Inversionen.
- (3) Die Menge der Möbiustransformationen ist eine Gruppe bzgl. der Komposition.
- (4) Jede Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.
- (5) Jede Möbiustransformation ist durch das Bild von drei verschiedenen Punkten aus $\hat{\mathbb{C}}$ eindeutig bestimmt.

Beispiel: Die Möbiustransformation T mit $T(1) = \infty$, $T(0) = 1$ und $T(-1) = 0$ ist gegeben durch $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$. T bildet das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene und die Einheitskreislinie auf die imaginäre Achse ab.

Bemerkung: Für eine invertierbare Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ sei T_A die Möbiustransformation $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Dann gilt $T_A \circ T_B = T_{AB}$ für alle invertierbaren Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, insbesondere etwa $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.

22.19. Harmonische Funktionen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ *harmonische Funktionen* in G , dh es gilt

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \text{in } G.$$

Zum Beweis beachte man, dass $u, v \in C^\infty$ gilt, und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Bemerkung: Umgekehrt ist jede harmonische C^2 -Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ lokal der Realteil einer holomorphen Funktion. Auf G gilt das i.a. nur dann, wenn G einfach zusammenhängend ist. Beachte dazu, dass in diesem Fall $\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$ wegen $(-u_y)_y = (u_x)_x$ ein Potentialfeld $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auf G ist. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist dann die C^2 -Funktion $u + iv$ auf G holomorph.

Beispiel: Die durch $u(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} = G$ definierte Funktion ist harmonisch in G . Eine zugehörige Funktion $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ findet man jedoch nicht (vgl. 22.15).

22.20. Regel von de l'Hôpital für holomorphe Funktionen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in G und nicht konstant Null. Sei $z_0 \in G$ mit $f(z_0) = 0 = g(z_0)$. Existiert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \in \mathbb{C}$, so gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$. Gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| = \infty$, so gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = \infty$. Tatsächlich tritt entweder der eine oder der andre Fall auf.

Beweis. Wir entwickeln f und g in Potenzreihen um z_0 und schreiben $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ in der Nähe von z_0 , wobei $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\sum_{k=m}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}{\sum_{k=n}^{\infty} b_k(z - z_0)^k} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\sum_{k=m}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-m}}{\sum_{k=n}^{\infty} b_k(z - z_0)^{k-n}}, \\ \frac{f'(z)}{g'(z)} &= \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}}{\sum_{k=n}^{\infty} k b_k(z - z_0)^{k-1}} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-m}}{\sum_{k=n}^{\infty} k b_k(z - z_0)^{k-n}}. \end{aligned}$$

Für $m = n$ und $z \rightarrow z_0$ sind beide Limiten $= \frac{a_n}{b_n}$. Für $m > n$ und $z \rightarrow z_0$ sind beide Limiten $= 0$. Für $n > m$ ist der Limes der Beträge in beiden Fällen $= \infty$ (wegen $|z - z_0|^{m-n} \rightarrow \infty$). \square

23 Fourierreihen

Ziel dieses Abschnitts ist es, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, der Periodenlänge $T > 0$ (man denke etwa an ein periodisches Audiosignal) als Überlagerung von T -periodischen “reinen” Schwingungen $t \mapsto e^{i\omega t}$ darzustellen. Die “Frequenzen” ω sind dann von der Form $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ hat man einen konstanten Anteil, die anderen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\frac{2\pi}{T}$ (Tonhöhe). Die Anteile der Oberschwingungen bestimmen die Klangfarbe.

Die Idee geht zurück auf Fourier (1822): “Jede 2π -periodische Funktion f lässt sich darstellen als Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$.”

Es hat einige Zeit gedauert, diese Idee zu präzisieren (Funktionsbegriff, geeigneter Integralbegriff, verschiedene Konvergenzbegriffe etc). Wir kümmern uns hier um die Fragen, wie man die c_k aus f erhält und für welche f man eine punktweise Konvergenz der Fourierreihe hat.

23.1. T -periodische Funktionen: Sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt T -periodisch, falls $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Es gilt dann auch $f(t + kT) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: (a) Eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte auf einem Intervall $[a, a + T)$ kennt (hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig). Jede Funktion $\tilde{f} : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig zu einer T -periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}$ auf $[a, a + T)$ fortsetzen.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische Funktion, so ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $g(t) := f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$, eine 2π -periodische Funktion. Es ist dann nämlich für $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = g(t).$$

Wir werden uns deshalb i.w. auf 2π -periodische Funktionen beschränken.

Beispiele: \sin , \cos und $t \mapsto e^{it}$ sind 2π -periodische Funktionen. Die Funktion $t \mapsto \cos(2t)$ ist 2π -periodisch, aber auch π -periodisch.

23.2. Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Für jedes $t \in [a, b]$ ist $f(t)$ eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch $u(t) := \operatorname{Re}(f(t))$ und $v(t) := \operatorname{Im}(f(t))$ werden Funktionen $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit $f(t) = u(t) + iv(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (Bezeichnungen $u =: \operatorname{Re} f$, $v =: \operatorname{Im} f$).

Die Funktion f heißt (Riemann-)integrierbar, falls u **und** v integrierbar sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Das Integral ist \mathbb{C} -linear, dh: Ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere integrierbare Funktion und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dt = \alpha \int_a^b f dt + \beta \int_a^b g dt.$$

Uneigentliche Integrale erklärt man entsprechend.

Analog heißt f differenzierbar in $t_0 \in [a, b]$, falls u **und** v differenzierbar in t_0 sind, und in diesem Falle ist $f'(t_0) := u'(t_0) + iv'(t_0)$ die *Ableitung von f in t_0* .

Auch die Ableitung ist \mathbb{C} -linear. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel, wobei in der Kettenregel für $f \circ g$ die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertig ist, aber $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ reellwertig.

Folgerung: Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

Erinnerung: Für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ ist

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v), \quad |e^w| = |e^u| |e^{iv}| = e^u = e^{\operatorname{Re} w}.$$

Beispiele: (1) Für $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{wt} dt = \frac{e^{wb} - e^{wa}}{w}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{wt} &= \frac{d}{dt} (e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt))) = u e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt)) + e^{ut} (-v \sin(vt) + iv \cos(vt)) \\ &= (u + iv) e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt)) = w e^{wt} \end{aligned}$$

folgt das aus dem Hauptsatz.

(2) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, die über beschränkten Intervallen integrierbar ist, so gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Wir werden 2π -periodische Funktionen meist auf $[-\pi, \pi)$ betrachten und über dieses Intervall integrieren.

(3) Für $l, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} dt = \begin{cases} 2\pi & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases}.$$

23.3. Trigonometrische Polynome: Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$* , falls es Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$, gibt mit

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für ein solches f und $l \in \mathbb{Z}$ gilt dann nach Beispiel 23.2 (3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt = \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \begin{cases} 2\pi c_l & , |l| \leq n \\ 0 & , |l| > n \end{cases}.$$

Bemerkung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man kann also statt mit e^{ikt} für $|k| \leq n$ auch mit $\sin(kt), \cos(kt)$ für $1 \leq k \leq n$ bzw. $0 \leq k \leq n$ arbeiten.

Ende Do
13.07.23

23.4. Fourierkoeffizienten einer Funktion: Sei $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(k) := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

der k -te *Fourierkoeffizient*, und $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt *Folge der Fourierkoeffizienten von f* .

Bemerkung: Man verwendet außerdem gelegentlich für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_k(f) &:= c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k(f) &:= i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt. \end{aligned}$$

Ist f reellwertig, so sind $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}_0}, (b_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. Man hat (vergleiche Bemerkung in 23.3)

$$\sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kt),$$

und es gilt $c_0(f) = a_0(f)/2$, sowie für $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k(f) = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, \quad c_{-k}(f) = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}.$$

Beispiele: (1) Wir betrachten die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch $f(t) := t$ für $t \in [-\pi, \pi)$ definiert ist. Es gilt $\hat{f}(0) = 0$. Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt}_{=0} = \frac{(-1)^k i}{k}.$$

(2) Sei die 2π -periodische Funktion f auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch $f(t) = t^2$. Für $k = 0$ ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} dt = \underbrace{\frac{t^2}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt = \frac{2}{ik} \frac{(-1)^k i}{k} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.$$

23.5. Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen: Eine 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

(a) *stückweise stetig*, falls es $m \in \mathbb{N}$ und

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \dots, m-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte

$$f(t_j+) = \lim_{t \rightarrow t_j+} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_{j+1}-) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}-} f(t)$$

existieren in \mathbb{C} .

(b) *stückweise glatt*, falls es $m \in \mathbb{N}$ und

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \dots, m-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+)$, $f(t_{j+1}-)$ und

$$f'(t_j+) = \lim_{t \rightarrow t_j+} f'(t), \quad f'(t_{j+1}-) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}-} f'(t)$$

existieren in \mathbb{C} .

In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein, der Funktionswert $f(t_j)$ spielt keine Rolle.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig. Ist f stetig differenzierbar, so ist f stückweise glatt.

Ist f stückweise stetig, so existieren in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte $f(t+)$ und $f(t-)$.

Beispiele: (1) Die Funktionen in den Beispielen 23.4(1) und (2) sind stückweise glatt.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch mit $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, \pi) \\ -1 & , t \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Dann ist f stückweise glatt.

23.6. Darstellungssatz für 2π -periodische Funktionen: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stückweise glatt. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Ist f stetig in t , so konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$. (ohne Beweis)

Beispiele: (1) Für die 2π -periodische Funktion f mit $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 23.4(1) $\hat{f}(k) = (-1)^k i/k$ für $k \geq 1$. Weiter ist

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{(-1)^k i}{k} (\cos(kt) + i \sin(kt)) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt),$$

also

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

da f in diesen Punkten stetig ist.

An der Stelle $t = \pi$ ist f unstetig. Setzt man $t = \pi$ in die Reihe rechts ein, so erhält man den Wert 0. In der Tat ist $f(\pi-) = \pi$, $f(\pi+) = f(-\pi+) = -\pi$ und also $\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0$.

(2) Für die 2π -periodische Funktion f mit $f(t) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 23.4(2):

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Da f stetig und stückweise glatt ist, gilt nach Satz 23.6:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikt}, \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere erhält man für $t = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Bemerkung: Der Darstellungssatz legt es nahe, für stückweise stetige (und damit insbesondere für stückweise glatte Funktionen) die folgende *Normalisierung* zu betrachten:

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stückweise stetig mit $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$ wie in 23.5 (a), so heißt f *normalisiert*, wenn $f(t_j) = \frac{f(t_j+) + f(t_j-)}{2}$ für $j = 1, \dots, n$ gilt. Es gilt dann $f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Durch eventuelles Abändern der Funktionswerte $f(t_j)$ lässt sich jede stückweise stetige Funktion normalisieren. Die Fourierkoeffizienten ändern sich dabei nicht.

Ist also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch, stückweise glatt und normalisiert, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} = f(t).$$

23.7. Konvergenz im quadratischen Mittel: Durch

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

wird auf $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ein Skalarprodukt definiert, also auch auf

$$C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) := \{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) : f(\pi) = f(-\pi)\}.$$

Wir können diesen Raum mit $\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}$ identifizieren (vergleiche mit 23.1 Bemerkung (a)).

Bezeichnen wir für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion $t \mapsto e^{ikt}$ mit e_k , so bedeutet 23.2 (3), dass $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein *Orthonormalsystem* in $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ bzgl. dieses Skalarproduktes ist.

EndeMo
17.07.23

Satz 1: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und $\dim V = \infty$. Sei $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in V , dh $(e_k | e_l) = \delta_{kl}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Für jedes $v \in V$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(v | e_k)|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}),$$

und es sind äquivalent:

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} |(v|e_k)|^2 = \|v\|^2$,
- (ii) $\|v - \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Gilt (i) (oder (ii)) für jedes $v \in V$, so heißt das Orthonormalsystem $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *vollständig* in V . Man hat dann auch

$$(v|w) = \sum_{k=1}^{\infty} (v|e_k) \overline{(w|e_k)} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Beweis. Der Zusatz folgt durch sogenannte *Polarisation* aus (i) (\rightarrow Literatur). Für jedes $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v - \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k\|^2 &= \|v\|^2 + \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(v \left| \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k \right. \right) \\ &= \|v\|^2 + \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n (v|e_k) \overline{(v|e_k)} \\ &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Besselsche Ungleichung, und (i) und (ii) sind äquivalent. □

Satz 2: Für jedes $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2 \quad \text{und} \quad \|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Insbesondere ist $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Beweis. 1) Sei zunächst f stetig differenzierbar mit $f, f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Dann gilt für $k \neq 0$: $\hat{f}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{(f')}(k)$. Insbesondere folgt mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}(k)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{(f')}(k)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e_k$ konvergiert auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen ein $g \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, siehe HMI, 9.8 (b). Da f stetig und stückweise glatt ist, konvergiert diese Reihe nach 23.6 aber punktweise gegen f . Also ist $g = f$ und damit

$$\|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\| \leq \|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

2) Ist nun $f \in C_{\text{per}}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ beliebig, so kann man Teil 1) anwenden auf f_δ , gegeben durch

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(t) dt,$$

wobei $\delta > 0$. Es gilt

$$\|g\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|g\|_\infty \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \right)^{1/2} = \|g\|_\infty,$$

also $\|f - f_\delta\| \leq \|f - f_\delta\|_\infty$. Außerdem gilt $\|f - f_\delta\|_\infty \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0+$: Zu $\varepsilon > 0$ findet man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[-2\pi, 2\pi]$ ein $\delta_0 \in (0, 1)$ mit $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$ für alle $x, t \in [-2\pi, 2\pi]$ mit $|x - t| \leq \delta_0$. Für $\delta \in (0, \delta_0)$ ist dann

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|_\infty &= \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - f_\delta(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} (f(x) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \sup_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Konvergenzaussage aus dem Satz für f . Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta > 0$ mit $\|f - f_\delta\| < \varepsilon/3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e_k \right\| &\leq \|f - f_\delta\| + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| + \left\| \sum_{|k| \leq n} (\widehat{f - f_\delta})(k) e_k \right\| \\ &\leq 2\|f - f_\delta\| + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| \leq 2\varepsilon/3 + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $n \geq n_0$ und geeignetes n_0 . Damit ist der Satz gezeigt. \square

23.8. Hilberträume: Ein \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, falls er bezüglich der zum Skalarprodukt gehörigen Norm $\|\cdot\|$ *vollständig* ist, dh also wenn jede Cauchyfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V einen Grenzwert hat.

Ende Di
18.07.23

Dabei heißt eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Cauchyfolge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|v_n - v_m\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ (vgl. HM I).

Beispiele: 1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{K}^n ein Hilbertraum.

2) $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ ist ein Hilbertraum. Sei $(x^{(n)})$ eine Cauchyfolge in $l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$, wobei $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$. Wegen

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$$

ist $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes k eine Cauchyfolge in \mathbb{K} , die gegen ein $x_k^{(0)} \in \mathbb{K}$ konvergiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und n_0 gewählt mit $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Sei $n \geq n_0$. Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2}_{\leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2} \leq \varepsilon^2,$$

für $N \rightarrow \infty$ also $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$. Daraus folgt $x^{(0)} \in l_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ und $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

23.9. Abschlußbemerkung: Setzt man $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) := \{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty\}$, so erhält die lineare Abbildung

$$C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \rightarrow l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}},$$

Norm und Skalarprodukt, ist also insbesondere injektiv. Sie ist aber nicht surjektiv! Betrachtet man den größeren Raum $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ (\rightarrow Lebesgue-Integral), so wird diese Abbildung surjektiv. $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum, nicht aber $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

24 Fouriertransformation

24.1. Motivation: In vorigen Kapitel haben wir 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die etwa stetig differenzierbar sind, in Fourierreihen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik(\cdot)}$ entwickelt. Dabei kann man für $k \in \mathbb{Z}$ den Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx$$

als Anteil der Frequenz k (Oberton der Grundfrequenz 1) im Gesamtsignal verstehen. Für $2T$ -periodische Funktionen lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 23 umrechnen.

Sei nun $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $f(x) = 0$ für $x \notin [-a, a]$ (Impulssignal ohne jegliche Periodizität). Was kann man für eine solche Funktion machen?

Für $T > a$ definieren wir die $2T$ -periodische Funktion $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f_T := f$ auf $(-T, T]$ und wollen $T \rightarrow \infty$ betrachten. Die durch $g(x) := f_T(\frac{T}{\pi}x)$ definierte Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist 2π -periodisch. Wir entwickeln g in eine Fourierreihe mittels der Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} g(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f_T\left(\frac{T}{\pi}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\frac{k\pi}{T}y} f(y) dy, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei wir $x = \frac{\pi}{T}y$ substituiert haben. Das letzte Integral erstreckt sich nach Voraussetzung nur über $[-a, a]$. Wir verzichten auf den Normierungsfaktor $\frac{1}{2T}$ und definieren

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es ist dann

$$c_k = \frac{1}{2T} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Fouriersumme $\sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$ mit Limes $g(x) = f_T(\frac{T}{\pi}x)$, $x \in \mathbb{R}$, erhält somit (wieder über $x = \frac{\pi}{T}y$) die Form

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{i\frac{k\pi}{T}y} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{i\frac{k\pi}{T}y} \frac{\pi}{T}$$

mit Grenzwert $f(y)$ (für $n \rightarrow \infty$), wobei $|y| \leq T$. Die Summe ist dabei eine Riemannsumme für das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n\pi/T}^{n\pi/T} e^{i\xi y} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Man wird also hoffen, dass gilt

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad y \in \mathbb{R},$$

zumindest für Funktionen f , die “schön genug” sind.

24.2. Absolut integrierbare Funktionen: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar ist. Wir nennen die Funktion f *absolut integrierbar* (aib), falls

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \sup_{R>0} \int_{-R}^R |f(x)| dx < \infty.$$

Bemerkung: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx,$$

und es gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right| \leq \|f\|_1.$$

Die Menge der absolut integrierbaren Funktionen ist ein komplexer Vektorraum, und für $\alpha \in \mathbb{C}$ und absolut integrierbare Funktionen f, g gilt

$$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Beispiele: (1) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, so ist f absolut integrierbar.

(2) Die durch $f(x) := (1 + |x|)^{-\alpha}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann absolut integrierbar, wenn $\alpha > 1$ gilt.

(3) Die durch $g(x) := e^{-\alpha|x|}$ definierte Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ absolut integrierbar.

(4) Eine absolut integrierbare Funktion muss nicht beschränkt sein. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $f(x) := \sqrt{n}$ für $x \in [n, n + 1/n^2]$ und $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) := 0$ sonst, ist absolut integrierbar.

24.3. Eigenschaften: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar.

(a) Gilt $|f| \leq |g|$ auf \mathbb{R} und ist g absolut integrierbar, so ist auch f absolut integrierbar.

(b) Ist f absolut integrierbar und g beschränkt, so ist fg absolut integrierbar und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}.$$

24.4. Fouriertransformation: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Die *Fouriertransformierte von f* definiert man für $\xi \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Das Integral konvergiert dabei für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ absolut, da $|e^{-i\xi x} f(x)| = |f(x)|$ für jedes x gilt und f absolut integrierbar ist (vgl. 24.3). Wir erhalten

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_1, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

so dass $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt ist mit $\|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Beispiele: (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = e^{-a|x|}$, ist für $a > 0$ absolut integrierbar. Es gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist absolut integrierbar.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = 1$ für $x \in [-1, 1]$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist f absolut integrierbar und

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}f(0) = 2.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ ist nicht absolut integrierbar.

24.5. Holomorphe Fortsetzung: Sei $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar. Außerdem sei $x \mapsto e^{a|x|} f(x)$ absolut integrierbar. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z| < a$ gilt

$$|e^{-izx}| = \exp(-\operatorname{Re}(iz)x) = \exp((\operatorname{Im} z)x) \leq e^{a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Also konvergiert das Integral

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx$$

absolut für $z \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Im} z| < a$. Die Funktion

$$F : \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}}_{=: H_a} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(z),$$

ist eine holomorphe Fortsetzung von \hat{f} mit

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} (-ix) f(x) dx, \quad z \in H_a.$$

Beachte, dass auch diese Integrale absolut konvergieren.

Ende Do
20.07.23

Beweis. (Nicht in der Vorlesung gebracht!) Sei $z \in H_a$. Wir bezeichnen das letzte Integral mit $G(z)$. Sei $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h| < (a - |\operatorname{Im} z|)/2 := \eta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| &= \left| \int \left(\frac{e^{-i(z+h)x} - e^{-izx}}{h} + ix e^{-izx} \right) f(x) dx \right| \\ &= \left| \int \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{ihx} + 1 \right) ix e^{-izx} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Der Term in der Klammer ist betragsmäßig $\leq |hx|e^{|hx|}$, so dass der Betrag des Integranden sich abschätzen lässt durch

$$|h|x^2|f(x)| \exp((|\operatorname{Im} z| + |h|)|x|) \leq |h| \underbrace{x^2 e^{(a-\eta)|x|}}_{=:g(x)} |f(x)|.$$

Dabei ist g absolut integrierbar und also

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| \leq |h| \|g\|_1 \rightarrow 0 \quad (|h| \rightarrow 0).$$

□

24.6. Satz: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Dann ist die Funktion $\mathcal{F}f$ gleichmäßig stetig. Außerdem gilt $\mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$, $|\xi| \rightarrow \infty$ (Riemann-Lebesgue-Lemma).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $\delta > 0$ mit $|e^{-ix} - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi+h) - \mathcal{F}f(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-i(\xi+h)t} - e^{-i\xi t})f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1| |f(t)| dt \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \int_{|t| \leq \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt} + 2 \underbrace{\int_{|t| > \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}f$ gleichmäßig stetig.

Ist f gegeben durch $f(t) = 1$, $t \in [a, b]$, und $f(t) = 0$ sonst, so gilt für $\xi \neq 0$:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_a^b e^{-i\xi t} dt = \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi}$$

und somit $\mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$ für $|\xi| \rightarrow \infty$. Dies gilt dann auch für alle Linearkombinationen solcher Funktionen. Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument.

□

24.7. Rechenregeln: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar.

(a) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathcal{F}\{f(a(\cdot))\}(\xi) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathcal{F}\{f(\cdot - b)\}(\xi) = e^{-i\xi b}\mathcal{F}f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathcal{F}\{e^{ib(\cdot)}f\}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi - b)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

(d) Ist $x \mapsto xf(x)$ absolut integrierbar, so ist $\mathcal{F}f$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \mathcal{F}\{x \mapsto (-ix)f(x)\}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(e) Ist f stetig und stückweise stetig differenzierbar derart, dass f' wieder absolut integrierbar ist, so gilt

$$\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Dabei nennen wir f stückweise stetig differenzierbar, falls eine streng monoton wachsende Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ existiert mit $x_j \rightarrow \pm\infty$ für $j \rightarrow \pm\infty$ so, dass f auf jedem Intervall (x_j, x_{j+1}) stetig differenzierbar ist und die einseitigen Grenzwerte $f(x_j \pm)$, $f'(x_j \pm)$ existieren.

Beweis. Man erhält (a), (b) und (c) durch naheliegende Substitutionen.

Bei (d) findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|\frac{e^{iy}-1}{y} - 1| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$. Außerdem ist $\sup_y |\frac{e^{iy}-1}{y} - 1| =: M < \infty$. Für $h \neq 0$ ist dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} + \int ix f(x) e^{-ix\xi} dx \right| &= \left| \int \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{ihx} + 1 \right) ix f(x) e^{-ix\xi} dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{|x| \leq \delta/|h|} |xf(x)| dx + M \int_{|x| \geq \delta/|h|} |xf(x)| dx, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral nach Voraussetzung wieder für $h \rightarrow 0$ gegen Null geht.

Bei (e) beachte man, dass absolute Integrierbarkeit von f' Existenz der Grenzwerte $f(\pm\infty)$ impliziert, da etwa

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(x) dx$$

für $b \rightarrow \infty$ konvergiert. Da f außerdem absolut integrierbar ist, muss $f(\pm\infty) = 0$ gelten. Für $a, b > 0$ ist dann mittels partieller Integration

$$\int_{-a}^b e^{-i\xi x} f'(x) dt = e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-a}^b + i\xi \int_{-a}^b e^{-i\xi x} f(x) dt,$$

und (e) folgt für $a, b \rightarrow \infty$. □

24.8. Beispiel: $\phi(x) = e^{-x^2/2}$: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\phi'(x) = -x\phi(x)$. Wir wenden die Fouriertransformation auf diese Gleichung an und erhalten:

$$i\xi \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}\{\phi'\}(\xi) = \mathcal{F}\{x \mapsto -x\phi(x)\}(\xi) = -i(\mathcal{F}\phi)'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

also $(\mathcal{F}\phi)'(\xi) = -\xi(\mathcal{F}\phi)(\xi)$. Somit löst $\mathcal{F}\phi$ dieselbe Differentialgleichung wie ϕ und es folgt

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}\phi(0) \cdot e^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

da $\mathcal{F}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

24.9. Dancing-Hat-Lemma: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)(\mathcal{F}g)(\eta) d\eta.$$

Der Name kommt daher, dass man statt $\mathcal{F}f$ ja auch \hat{f} (engl: "hat f") schreibt.

Beweis. Nur für f, g mit $f(x) = g(x) = 0$ für $x \notin [-a, a]$ (allgemeiner Fall durch Approximation). Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i\xi\eta} f(\eta) d\eta g(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i\xi\eta} g(\xi) d\xi f(\eta) d\eta.$$

□

24.10. Fourierinversionsformel: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass $\mathcal{F}f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Ende Mo
24.07.23

Beweis. Es reicht, die Formel für $x = 0$ zu zeigen (verwende die Verschiebungsregel 24.7(b)). Wir setzen $h(x) = e^{-x^2/2}$ und $g(x) = h(ax)$, wobei $a > 0$. Dann gilt nach 24.9 und 24.7(a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)h(a\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{a}(\mathcal{F}h)(x/a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathcal{F}h(x) dx.$$

Lässt man hier a gegen Null gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen $2\pi f(0)$ und die linke Seite konvergiert gegen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) d\xi$, wovon wir uns jetzt überzeugen.

Linke Seite: Es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)h(a\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| |h(a\xi) - 1| d\xi.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ so, dass $|h(x) - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle (anderen) $x \in \mathbb{R}$ hingegen gilt $|h(x) - 1| \leq 2$. Wir können dann weiter abschätzen

$$= \int_{|\xi| \leq \delta/a} \dots + \int_{|\xi| \geq \delta/a} \dots \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\xi)| d\xi + 2 \underbrace{\int_{|\xi| > \delta/a} |(\mathcal{F}f)(\xi)| d\xi}_{\rightarrow 0, (h \rightarrow 0)}.$$

Rechte Seite: Zunächst gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2} dt = 2\pi.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Da f beschränkt ist, gibt es andererseits $M > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben nun

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(at)(\mathcal{F}h)(t) dt - 2\pi f(0) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(at) - f(0)| |(\mathcal{F}h)(t)| dt = \int_{|t| \leq \delta/a} \dots + \int_{|t| \geq \delta/a} \dots$$

und können wie oben verfahren. \square

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man in 24.8 Stetigkeit und Beschränktheit von f nicht fordern muss. Diese Eigenschaften erhält man aus der Voraussetzung, dass $\mathcal{F}f$ absolut integrierbar ist.

Beispiel: Es gilt $\mathcal{F}\{x \mapsto \frac{2}{1+x^2}\}(\xi) = 2\pi e^{-|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$. (Wende 24.10 auf das Beispiel in 24.4(1) mit $a = 1$ an).

24.11. Satz von Plancherel: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

Beweis. Ist zusätzlich $\mathcal{F}f$ absolut integrierbar, so verwende man 24.9 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) \overline{\mathcal{F}f(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}f}\}(x) dx.$$

Dann beachte man

$$\overline{\mathcal{F}f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \overline{f(x)} dx = (\mathcal{F}\overline{f})(-\xi)$$

und (unter Verwendung von 24.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (\mathcal{F}\overline{f})(-\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (\mathcal{F}\overline{f})(\xi) d\xi = 2\pi \overline{f(x)}.$$

Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument. \square

24.12. Quadratintegrierbare Funktionen: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die für jedes $R > 0$ über $[-R, R]$ integrierbar ist. Wir nennen die Funktion f *quadratintegrierbar* (qib), falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sup_{R>0} \int_{-R}^R |f(x)|^2 dx < \infty.$$

In diesem Fall setzen wir

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Beispiele: (1) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, so ist f quadratintegrierbar.

(2) Die durch $f(x) := (1 + |x|)^{-\alpha}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann quadratintegrierbar, wenn $\alpha > 1/2$ gilt. Es gibt also quadratintegrierbare Funktionen, die nicht absolut integrierbar sind.

(3) Die durch $g(x) := e^{-\alpha|x|}$ definierte Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ quadratintegrierbar.

Bemerkung: Sind f und g quadratintegrierbar, so ist fg absolut integrierbar und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Die Menge der quadratintegrierbaren Funktionen ist ein komplexer Vektorraum. Die durch

$$(f|g) := \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

definierte Abbildung hat die Eigenschaften eines Skalarproduktes (bis auf die Definitheit, die man aber erhalten kann, wenn man Funktionen f, g mit $\|f - g\|_2 = 0$ identifiziert). Man hat

$$\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2, \quad (\alpha \in \mathbb{C}), \quad \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Die Aussage von 24.11 bedeutet also: Ist f absolut integrierbar und quadratintegrierbar, so ist $\mathcal{F}f$ quadratintegrierbar und

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2,$$

dh die Fouriertransformation ändert die “2-Norm” $\|\cdot\|_2$ nur um eine Konstante.

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und absolut integrierbar, so ist f quadratintegrierbar und

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_{\infty} \|f\|_1.$$

24.13. Heisenbergsche Unschärferelation (1-dim.): Sei $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, beschränkt und stetig differenzierbar. Außerdem seien ψ' und $x \mapsto x\psi(x)$ absolut integrierbar und beschränkt. Dann gilt

$$\|x\psi\|_2 \|\xi\hat{\psi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\psi\|_2^2.$$

Beachte dabei, dass nach der letzten Bemerkung in 24.12 die Funktionen ψ , ψ' und $x \mapsto x\psi(x)$ quadratintegrierbar sind. Nach 24.11 (Plancherel) ist dann $\hat{\psi}'$ quadratintegrierbar und somit ist auch $\xi \mapsto i\xi\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}'(\xi)$ quadratintegrierbar (verwende 24.7(d)).

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(x\psi|\psi') &= (x\psi|\psi') + (\psi'|x\psi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{x\psi(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{\psi(x)}) dx \\ &= x|\psi(x)|^2 \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= -\|\psi\|_2^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2}\|\psi\|_2^2 = |\operatorname{Re}(x\psi|\psi')| \leq \|x\psi\|_2 \|\psi'\|_2.$$

Außerdem ist

$$\|\psi'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{\psi}'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\xi\hat{\psi}\|_2.$$

□

Korollar: Ist ψ wie oben und sind $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\|(x - x_0)\psi\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\psi\|_2^2.$$

Beweis. Betrachte $g(x) := e^{-i\xi_0 x}\psi(x + x_0)$ und beachte dabei $|g(x)| = |\psi(x + x_0)|$ und $|\hat{g}(\xi)| = |\hat{\psi}(\xi + \xi_0)|$. □

Interpretation: Ist ψ wie in 24.13 mit $\|\psi\|_2 = 1$, so sind $x \mapsto |\psi(x)|^2$ und $\xi \mapsto (2\pi)^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichten auf \mathbb{R} . Sind X, Y Zufallsvariablen, die entsprechend verteilt sind und $x_0 = E(X) = \int x|\psi(x)|^2 dx$ der Erwartungswert von X , sowie $\xi_0 = E(Y) = \frac{1}{2\pi} \int \xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ der Erwartungswert von Y , so sind $\|(x - x_0)\psi\|_2 = \sigma_X$

und $(2\pi)^{-1/2}\|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 = \sigma_Y$ die Standardabweichungen von X bzw. Y , und das Korollar besagt

$$\sigma_X \sigma_Y \geq \frac{1}{2},$$

dh X und Y können nicht gleichzeitig beliebig gut um x_0 bzw. ξ_0 lokalisiert sein. In der Quantenmechanik entsprechen X und Y Ort bzw. Impuls eines Teilchens im *Zustand* ψ .

24.14. Faltung und Fouriertransformation: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und g sei beschränkt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $x \mapsto f(x)g(t-x)$ absolut integrierbar und die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx$$

heißt *Faltung von f und g* , geschrieben $h =: f * g$. Die Funktion $f * g$ ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar und es gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Gilt zusätzlich $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $f * g(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$f * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx, \quad t \geq 0.$$

Beweis. Zunächst ist das Integral in der Definition absolut konvergent und eine Substitution gibt

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(t-x) dx.$$

Ist $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||g(t-x)| dx \leq \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

und h ist beschränkt mit $\|h\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}\|f\|_1$. Ist zusätzlich $\tau \in \mathbb{R}$, so erhalten wir genauso

$$|h(t+\tau) - h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)||f(t+\tau-x) - f(t-x)| dx \leq \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau+y) - f(y)| dy,$$

wenn wir $x = t - y$ substituieren. Dabei konvergiert das letzte Integral für $\tau \rightarrow 0$ gegen Null (hier ohne Beweis). Also ist h stetig.

Weiter gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge (zunächst wieder für f, g stetig mit $f(x) = g(x) = 0$ für $x \notin [-a, a]$, allgemeine Funktionen muss man geeignet approximieren):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |g(t-x)| dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-x)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

und h ist absolut integrierbar. Der Beweis für die Faltungsregel der Fouriertransformation verwendet ähnliche Argumente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} h(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) e^{-i\xi(t-x)} g(t-x) dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(t-x)} g(t-x) dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} g(t) dt. \end{aligned}$$

□

24.15. Anwendung: Gegeben sei eine stetige und absolut integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $q \in \mathbb{C}$. Gesucht ist eine C^2 -Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$-u'' + qu = f, \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wenn wir annehmen, dass u, u', u'' absolut integrierbar sind, können wir die Fouriertransformation verwenden und erhalten via 24.7 die Gleichung

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + q \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ist nun $q \notin (-\infty, 0]$, so ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \xi \mapsto (\xi^2 + q)^{-1}$, beschränkt, und wir erhalten für die Fouriertransformation der Lösung:

$$\hat{u}(\xi) = (\xi^2 + q)^{-1} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nun müssen wir zurücktransformieren. Finden wir eine absolut integrierbare und beschränkte Funktion $k_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\hat{k}_q(\xi) = (\xi^2 + q)^{-1}$, so ist $u = k_q * f$ nach 24.14 ein Kandidat. Da $\xi \mapsto (\xi^2 + q)^{-1}$ absolut integrierbar ist, kann man nach 24.10 ansetzen

$$k_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 + q} d\xi.$$

Wir berechnen k_q für $q > 0$ (mithilfe des Beispiels in 24.10):

$$k_q(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} e^{-\sqrt{q}|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist beschränkt und absolut integrierbar. Eine Lösung der ursprünglichen Gleichung sollte also durch

$$u(x) := k_q * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{q}|x-y|} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

gegeben sein. Das ist noch zu überprüfen.

24.16. Wärmeleitungsgleichung: Gesucht ist $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

wobei $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ und $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$. Hierbei ist t die Zeitvariable und x die Ortsvariable.

Voraussetzung: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei absolut integrierbar. Außerdem sei $u(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $t > 0$ absolut integrierbar.

Bemerkung: Diese Annahme für u ist physikalisch sinnvoll. Ist z.B. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ proportional zur Gesamtenergie. Wir erwarten $u(t, x) \geq 0$ und wegen Energieerhaltung

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Wir verwenden Fouriertransformation in x und setzen

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(t, x) dx, \quad t > 0, \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann wird (1) zu

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung von (2) gegeben durch

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi), \quad t > 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Wir hoffen also, dass wir durch Fourierinversion eine Lösung von (1) erhalten. Nach der Faltungsregel ist für $g_t(x) := \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})(x)$:

$$\mathcal{F}(g_t * f)(\xi) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi),$$

also setzen wir

$$u(t, x) := g_t * f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die Funktion g_t . Es ist $e^{-t\xi^2} = e^{-(\sqrt{2t}\xi)^2/2}$, also

$$\begin{aligned} g_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-t\xi^2})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-(\sqrt{2t}\xi)^2/2})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2t}} \sqrt{2\pi} e^{-(-x/\sqrt{2t})^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ob bzw. in welchem Sinn dies nun eine Lösung von (1) ist, muss man noch überprüfen.

Bemerkung: Setzt man $h(t, x) := g_t(x)$, so löst h die Wärmeleitungsgleichung. Es gilt

$$\partial_t h(t, x) = -\frac{1}{2}(4\pi t)^{-3/2} \cdot 4\pi e^{-x^2/(4t)} + (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{x^2}{4t^2}$$

und

$$\partial_x h(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{-2x}{4t},$$

also

$$\partial_x^2 h(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{x^2}{4t^2} + (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{-1}{2t} = \partial_t h(t, x).$$

Bemerkung: Der zu dieser Lösung gehörige ‘‘Anfangswert’’ wäre δ_0 .

24.17. Ein Randwertproblem: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, so heißt eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *harmonisch*, falls u zweimal stetig differenzierbar ist und $\Delta u = 0$ in Ω gilt. Hierbei ist $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ der Laplace-Operator.

Wir setzen $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (obere Halbebene) und suchen eine Funktion $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Voraussetzungen: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei absolut integrierbar. Weiter sei $u(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x, y)$ für jedes $y > 0$ absolut integrierbar und es gebe $M > 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)| dx \leq M \quad \text{für alle } y > 0.$$

Wir verwenden wieder Fouriertransformation in x und setzen

$$\hat{u}(\xi, y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, y) dx.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{cases} -\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \partial_y^2 \hat{u}(\xi, y) = 0, & \xi \in \mathbb{R}, y > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}$ hat jede Lösung $v(y)$ der ersten Zeile von (2) die Form

$$v(y) = \alpha e^{-y|\xi|} + \beta e^{y|\xi|}, \quad y \geq 0,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (vgl. 13.5 in HMI). Wir beachten nun, dass die Voraussetzung impliziert:

$$|\hat{u}(\xi, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} |u(x, y)| dx \leq M, \quad \xi \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Also ist $y \mapsto \hat{u}(\xi, y)$ für festes $\xi \in \mathbb{R}$ beschränkt. Folglich ist oben $\beta = 0$ und $\alpha = \hat{f}(\xi)$, und wir erhalten

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Somit ist $u(x, y)$ gegeben als Faltung von f mit der Funktion $p_y := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})$, ausgewertet an der Stelle x . Wir rechnen

$$\begin{aligned} p_y(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-|\xi|})(-x/y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y} \frac{2}{1 + (-x/y)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Also ist u gegeben durch

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \tilde{x})^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Dieses u heißt *Poisson-Erweiterung von f* zu einer in der oberen Halbebene harmonischen Funktion. Dass hierdurch tatsächlich eine Lösung von (1) gegeben ist, muss noch überprüft werden.