Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroningenieurwesen, Physik und Gedoäsie
SS 2010/2011

Andreas Müller-Rettkowski
e-mail: andreas.mueller-rettkowski@kit.edu

LaTeX: Markus Maier

Dies ist eine Vorlesungs*zusammenfassung*, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen: In der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

Inhaltsverzeichnis

17. Vektorräume

17.1. Definitionen

Ein *Vektorraum* (VR) ist eine nichtleere Menge V zusammen mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, \qquad (x,y) \mapsto x+y \qquad \text{(Addition)}$$
$$\cdot : \mathbb{C} \times V, \qquad (\alpha, x) \mapsto \alpha x \qquad \text{(Skalarmultiplikation)}$$

so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $x + y = y + x \ \forall x, y, z \in V$
2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \forall x, y, z \in V$
3. Es gibt ein neutrales Element $0 \in V$ für $+$: $0 + x = x \ \forall x \in V$
4. Zu jedem $v \in V$ gibt es bzgl. $+$ ein Inverses $-x \in V$: $(-x) + x = 0$.
5. $1x = x$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$
8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ x, y \in V$.

Die Elemente von V heißen *Vektoren*. Wird oben anstelle von $\mathbb{C}$ als Skalarbereich $\mathbb{R}$ verwendet, so sprechen wir von einem *reellen Vektorraum*.

17.2. Beispiele

1. $V = \mathbb{C}^n$:

$$\vec{z} \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ mit } z_j \in \mathbb{C}.$$

Mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ werden definiert:

$$\vec{z} + \vec{w} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \vec{z} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix}$$

Den $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ kann man sich veranschaulichen.

2. $V = C^k([0,1])$: die auf $[0,1]$ definierten k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

$$f, g \in C^k[0,1]: \ (f+g)(x) := f(x) + g(x), \ x \in [0,1]$$
$$\alpha \in \mathbb{C}, f \in C^k[0,1]: \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \ x \in [0,1]$$

3. P_n der VR der Polynome vom Grad $\leq n$.

17.3. Teilraum (TR) eines VR, Linearkombinationen (LK)

Definition. *Es sei* $(V, +, \cdot)$ *ein VR.* $U \subset V$ *heißt* Teilraum (TR) von V, *wenn* $(U, +, \cdot)$ *ein VR ist. Es gilt*

$$U \text{ ist TR von } V \Leftrightarrow \text{ aus } \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ u, v \in U \text{ folgt: } \lambda u + \mu v \in U.$$

Definition. *V sei ein VR. Die Menge der Linearkombinationen (LK) der Vektoren* $v_1, \ldots, v_k$ $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$ *ist so definiert:*

$$v \in \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) \Leftrightarrow \text{ es gibt Zahlen } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ mit } v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

Satz 1. $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$ *ist ein TR von* V. $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$ *heißt der* von $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte TR.

Beispiele. *1. Ist* $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, *so beschreibt* $\mathrm{Lin}(\vec{a})$ *die Gerade durch* 0 *mit Richtung* $\vec{a}$.

2. $\vec{e_j} \in \mathbb{C}^n$ *ist der Vektor mit den Koordinaten*

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, k = 1, \ldots, n.$$

Es gilt für $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e_j} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht: $\mathrm{Lin}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}) = \mathbb{C}^n$.

3. P_n *ist ein TR von* $C^1(\mathbb{R})$.

17.4. Basis, Dimension

Definition. *Es sei* V *ein VR.*

$v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ *heißen* linear unabhängig (l.u.) $\Leftrightarrow$ *Aus* $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = 0$ $(\lambda_j \in \mathbb{C})$ *folgt* $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Vektoren, die nicht l.u. sind, heißen linear abhängig (l.a). *Also*

$$v_1, v_2, \dots, v_m \text{ sind l.a.} \Leftrightarrow \text{Es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \neq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = 0.$$

Beispiele. 1. $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ *in* $\mathbb{C}^n$ *sind l.u.*

2. $f(x) = 1,\ g(x) = x$ *sind in* $C[0, 1]$ *l.u.*

3. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sind in* $\mathbb{C}^3$ *l.u. Es gilt*

$$\mathrm{Lin}(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) = \mathrm{Lin}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$$

Definition. *Ein* r*-Tupel* $(v_1, \dots, v_r)$ *von Vektoren aus* V *heißt* Basis von V, *wenn*

$$v_1, \dots, v_r \text{ sind l.u. und} \tag{B$_1$}$$
$$\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) = V \tag{B$_2$}$$

erfüllt sind.

Beispiele. 1. $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ *ist eine Basis des* $\mathbb{C}^n$, *die sog.* kanonische Basis *oder* Standardbasis.

2. $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ *aus Beispiel 3) oben ist eine Basis des* $\mathbb{R}^3$.

Satz 2. *Es sei* V *ein TR des VR* W. *Es gilt:*

$(v_1, \dots, v_r)$ *ist eine Basis von* V

$\Leftrightarrow$

Zu jedem $v \in V$ *gibt es eindeutige Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *mit* $v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$.

Bemerkungen. *1. Diese v eindeutig zugeordneten Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ heißen* die Koordinaten von v *bzgl. der Basis $(v_1, \ldots, v_r)$.*

2. Wird ohne Zusatz $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *geschrieben, so ist* $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e_j}$ *gemeint, d.h.* $x_1, \ldots, x_n$ *sind die Koordinaten von $\vec{x}$ bezogen auf die Standardbasis des $\mathbb{C}^n$.*

$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ *bezogen auf* $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ *bedeutet:* $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\vec{b_1} + 6\vec{b_2} + 3\vec{b_3}$.

Satz 3. *Sind $(u_1, \ldots, u_n)$ und $(v_1, \ldots, v_m)$ Basen von V, so gilt $m = n$.*

V heißt *n-dimensional*, wenn es eine Basis aus n Vektoren gibt. Wir schreiben $\dim(V) = n$.

V heißt *unendlich-dimensional*: $\dim(V) = \infty$, falls es für jedes $n \in \mathbb{N}$ n l.u. Vektoren in V gibt.

Beispiele. *1.* $\mathrm{Lin}(1, x, x^2, x^3, \ldots)(x \in \mathbb{R})$ *ist unendlich-dimensional.*

2. $\dim(\mathbb{C}^n) = n$

3. $\dim(\mathrm{Lin}(\vec{a})) = 1$ *($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$)*

Bemerkungen. *(Versuchen Sie, zu begründen)*

1. *In einem n-dimensionalen VR sind je $n + 1$ Vektoren l.a.*

2. *In einem n-dim VR V gelten*

   a) Jede Menge unabhängiger Vektoren aus V ist Teilmenge einer Basis von V.

   b) Jedes n-Tupel von l.u. Vektoren aus V ist eine Basis von V.

18. Unitärer VR, euklidischer VR, Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität, Vektorprodukt

18.1. Definition

Es sei V ein VR. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt in V*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \forall u, v \in V \tag{S1}$$

$$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V \tag{S2}$$

$$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{S3}$$

$$\langle u, u\rangle > 0 \quad \forall u \in V, u \neq 0 \tag{S4}$$

Ein VR mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie oben heißt *unitärer VR*. Ein reeller VR mit $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und (S1), (S2), (S3), (S4) heißt *euklidischer VR*.

Beispiele. 1. *Der $\mathbb{C}^n$ ist mit*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle := \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$$

ein unitärer VR. Für $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ wird in $\mathbb{C}^n$ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ geschrieben. Es gilt $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_k = \delta_{kl}$.

2. *Der Raum $C^0[0, 1]$ ist mit*

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

ein unitärer VR.

3. *Aus (S1)-(S4) folgen:*

$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V \tag{S2'}$$

$$\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{C} \tag{S3'}$$

Satz 1. *Mit* $v_j, w_k \in V$; $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{C}$ $(j,k = 1, \ldots, n)$ *gilt*

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k w_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle v_j, w_k \rangle.$$

Satz 2 (Cauchy Schwarz Ungleichung, CSU)**.** *Im unitären Raum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *gilt*

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle. \tag{CSU}$$

Hier gilt die Gleichheit genau dann, wenn u, v *l.a. sind.*

Übung. *(Beispiele 1), 2) vorher) Schreiben Sie (CSU) auf für* $(\mathbb{C}^k, \vec{u} \cdot \vec{v})$ *und für* $C^0[0,1]$ *mit obigem Skalarprodukt.*

18.2. Norm

Definition. *Die für* $v \in V$ *im unitären Raum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *definierte Zahl*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

heißt die Norm *von* v.

Sie hat die in folgendem Satz zusammengestellten Eigenschaften:

Satz 3. *Es gelten für* $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$*:*

$$\begin{aligned} \|u\| &\geq 0 \text{ und} \\ \|u\| = 0 &\Leftrightarrow u = 0 \end{aligned} \tag{N1}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \tag{N2}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \tag{N3}$$

in (N3) gilt „=“, falls $u = 0$ *oder* $v = 0$ *oder* $u = \alpha v$ $(\alpha > 0)$ *erfüllt sind.*

Bemerkungen. 1. *CSU (Satz 2) kann auch so geschrieben werden:*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

2. *Für* $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j \in \mathbb{C}^n$ *hat man*

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \right)^{1/2}$$

18.3. Winkel, Orthogonalität im euklidischen Raum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

Definition. *Der* Winkel *zwischen* $u \neq 0, v \neq 0,\ u, v \in V$ *ist die Zahl* $\theta \in [0, \pi]$, *für die*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \tag{W}$$

gilt.

Bemerkungen. 1. *Im* $\mathbb{R}^n$ *sieht (W) so aus:* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$. *(Im* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ *kann man sich das veranschaulichen.)*

2. *Man liest ab (im* $\mathbb{R}^n$*): Ist* $\|\vec{u}\| = 1$, *so gibt* $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *die Länge der orthogonalen Projektion von* $\vec{v}$ *in Richtung von* $\vec{u}$ *bzw.* $-\vec{u}$ *an, je nachdem, ob* $\theta(= \angle(\vec{u},\vec{v})) \in [0, \pi/2]$ *oder* $\in [\pi/2, \pi]$ *ist.*

Definition. $u, v \in (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, V *unitärer Raum:*

$$u \perp v (\text{„}u \text{ orthogonal zu } v\text{“}) \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

18.4.

Eine Menge $X \subset (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (unitär) heißt *Orthogonalsystem (ONS)* falls gelten:

1. $\|u\| = 1\ \forall u \in X$
2. $\langle u, v\rangle = 0\ \forall u, v \in X, u \neq v$.

Satz 4. *Je endlich viele Vektoren einer orthonormalen Menge* X *in einem unitären VR* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *sind l.u.*

Folgerung. *In einem n-dim unitären VR* $(V, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$

- *besitzt jedes ONS höchstens n Elemente*
- *ist jedes ONS aus n Elementen eine Basis, eine sog.* ON-Basis.

Satz 5. *Es sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein unitärer n-dim VR und* $(v_1, \ldots, v_n)$ *eine ON-Basis. Es gelten:*

1. *Für* $v \in V$*:*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j$$

2. Für $v, w \in V$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle \overline{\langle w, v_k \rangle}$$

3. 2. $\Rightarrow$

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \qquad \text{(Parsevalsche Gleichung)}$$

Bemerkung. *Ist $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein endliches ONS im unitären VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $v \in V$ die* Besselsche Ungleichung*:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

18.5. Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren

Satz 6. *In einem n-dim unitären VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt es eine ON-Basis $(y_1, \ldots, y_n)$.*

$(y_1, \ldots y_n)$ wird wie folgt aus einer Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ konstruiert:

1.Schritt:

$$y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

2.Schritt: *Sind für $1 \leq r \leq n-1$ $y_1, \ldots y_r$ schon konstruiert, so ist*

$$y_{r+1} = \frac{x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \langle x_{r+1}, y_j \rangle y_j}{\left\| x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \langle x_{r+1}, y_j \rangle y_j \right\|}.$$

Die $y_1, \ldots, y_n$ haben die Eigenschaft

$$\mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_k) = \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_k) \text{ für } k = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Rechnen Sie nach, dass die im 1. und 2. Schritt angegebenen $y_1, \ldots, y_n$ die geforderten Eigenschaften haben: $\langle y_j, y_k \rangle = \delta_{jk}$ und (*). Veranschaulichen Sie sich das Verfahren für $V = \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$.

18.6. Das Vektorprodukt

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e}_j$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{3} y_j \vec{e}_j$ wird definiert

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} :=& (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{e}_1 \\ &+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{e}_2 \\ &+ (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

$\vec{x} \times \vec{y}$ heißt das *Vektorprodukt (Kreuzprodukt)* von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Satz 7. *Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:*

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ ($\Rightarrow \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$)
2. $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$,
   $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
3. $(\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\alpha\vec{y})$
4. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$
5. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$,
   $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} =$ *selber berechnen!*
6. $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ *und* $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$.
7. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$,
   $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin(\angle(\vec{x}, \vec{y}))$
8. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$.

Das kann alles mit obiger Def. nachgerechnet werden. Das ist nicht schwierig, aber ermüdend.

Bemerkungen.

1. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ *ist der Inhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.*
2. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ *sind l.a.* $\Leftrightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$
3. $|(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z})|$ *gibt das Volumen des Spats mit den Kanten $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ an.*

$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ heißt *das Spatprodukt* von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} =& x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 \\ &- x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2\end{aligned}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.

Satz 8. *1.* $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$.

2. *($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):* $(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z})$

3. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *sind l.a.* $\Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$.

4. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$

5. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 \geq 0$.

Nachrechnen!

19. Lineare Abbildungen, Matrizen

19.1. Defintion Lineare Abbildung

Es seien V und W VRe. Die Funktion $f : V \to W$ heißt *linear*, falls für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \tag{L}$$

erfüllt ist.

Beispiele. *1. Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{a}\| = 1$ ein fester Vektor.*

$$P_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ P_{\vec{a}}(\vec{x}) := (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a}$$

ist eine lineare Abbildung ($V = W = \mathbb{R}^3$).

2. Es sei $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor ($\neq \vec{0}$). Die Zuordnung

$$\vec{x} \mapsto \vec{x} \times \vec{F}$$

ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($V = W = \mathbb{R}^3$).

3. $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $Df := f'$, ist eine lineare Abbildung ($V = C^1(\mathbb{R})$, $W = C^0(\mathbb{R})$).

Bezeichnung. $\mathcal{L}(V, W) := \{f \mid f : V \to W,\ f \text{ linear}\}$

19.2. Einfache Eigenschaften linearer Abbildungen

A1) $\mathcal{L}(V, W)$ ist mit den für Funktionen üblichen „Addition“ und „skalare Multiplikation“ selbst ein VR

A2) Für $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(v_k)$$

(Wende (L) $(n-2)$ mal an oder argumentiere induktiv.)

A3) Aus $f \in \mathcal{L}(V,W)$, $g \in \mathcal{L}(W,U)$ folgt $g \circ f \in \mathcal{L}(V,U)$.

A4) Ist $f \in \mathcal{L}(V,W)$ bijektiv, so ist $f^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ und f^{-1} ist bijektiv

Bemerkung. *Eine lineare bijektive Abbildung $f : V \to W$ heißt* Isomorphismus. *Zwei VRe V, W heißen zueinander* isomorph, *falls es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt.*

Satz 1. *V, W seien VRe, $(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n$ seien Vektoren aus W. Dann gibt es genau ein $f \in \mathcal{L}(V,W)$ mit $f(v_k) = w_k,\ k = 1, \dots, n$.*

(Def von $f(v) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k$ mit $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$)

Satz 2. *V, W seien VRe, $(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis und $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Es gilt*

$$f \text{ ist ein Isomorphismus } \Leftrightarrow (f(v_1), \dots, f(v_n)) \text{ ist eine Basis von } W$$

Definition. *$f \in \mathcal{L}(V,W)$:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(f) &= \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \\ \mathrm{Bild}(f) := f(V) &= \{w \in W \mid f(v) = w \text{ für ein } v \in V\}. \end{aligned}$$

Kern(f) *ist TR von V,* Bild(f) *ist TR von W.*

Satz 3. *Es seien $f \in \mathcal{L}(V,W)$ und* $\dim(V) = n$. *Dann gilt:*

$$\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = n$$

19.3. Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine (m,n)-Matrix A ist ein Schema von $m \cdot n$ Zahlen α_{jk} $(j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$, die wie folgt angeordnet werden:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{lk})$$

Dabei ist l der Zeilen- und k der Spaltenindex.

Die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} \alpha_{1l} \\ \alpha_{2l} \\ \vdots \\ \alpha_{ml} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ bezeichnen wir durch $\vec{a}_l$ $(l = 1, \dots, n)$ und werden die Matrix oft in Spaltenform $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$ schreiben.

Die Elemente der Matrix A werden auch häufig durch $(A)_{lk}$ bezeichnet werden.

1. Es seien V, W VRe mit $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. In V ist die Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und in W die Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ gewählt. Es ist $f \in \mathcal{L}(V, W)$ gegeben. f wird eine (m, n)-Matrix $A = (\alpha_{lk})_{\substack{l=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$ so zugeordnet: Der k-te Spaltenvektor $\vec{a}_k$ ist der Koordinatenvektor von $f(v_k)$ bezogen auf die Basis $(w_1, \ldots, w_m)$:
$$f(v_k) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lk} w_l \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$
Die so unter den obigen Gegebenheiten f eindeutig zugeordnete (m, n)-Matrix A heißt die *Darstellungsmatrix* von f. Man berechnet den Koordinatenvektor $\overrightarrow{f(x)} = \begin{pmatrix} (f(x))_1 \\ \vdots \\ (f(x))_m \end{pmatrix}$ von $f(x)$ für ein $x = \sum_{l=1}^{m} x_k v_k \in V$ so:
$$f(x) = \sum_{l=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{lk} x_k \right)}_{=(f(x))_l} w_l$$
und man liest ab:
$$\overrightarrow{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k x_k \tag{2}$$
Für 19.1, Beispiel 2), findet man, falls man in $\mathbb{R}^3$ im Urbild und Bild jeweils die kanonische Basis wählt, die Darstellungsmatrix
$$\begin{pmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{pmatrix}$$
wobei $\vec{F} = \sum_{j=1}^{3} F_j \vec{e}_j$ verwendet wird.

2. Umgekehrt kann man jede (m, n)-Matrix $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung
$$f : (\mathbb{C}^n; (\vec{e}_1^{(n)}, \ldots, \vec{e}_n^{(n)})) \to (\mathbb{C}^m, (\vec{e}_1^{(m)}, \ldots, \vec{e}_m^{(m)}))$$
auffassen, indem man definiert:
$$f(\vec{e}_j^{(n)}) = \vec{a}_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

19.4.

- Durch $\mathbb{C}^{(m,n)}$ ($\mathbb{R}^{(m,n)}$) wird die Menge der (m, n)-Matrizen mit komplexen (reellen) Elementen bezeichnet

- $\mathbb{C}^{(1,1)} = \mathbb{C}$ sind Zahlen
- $\mathbb{C}^{(m,1)} = \mathbb{C}^m$ sind die (Spalten-)Vektoren
- Die $(1,n)$-Matrizen heißen auch *Zeilenvektoren*
- Die Nullmatrix 0 hat als Einträge nur Nullen:

$$A = 0 \Leftrightarrow (A)_{lk} = 0 \ \forall l, k$$

- A mit $(A)_{lk} = \delta_{lk}\alpha_{lk}$ heißt *Diagonalmatrix.* Ist $A \in \mathbb{C}^{(m,m)}$, so sieht die Spaltenform so aus:

$$A = [\alpha_{11}\vec{e}_1^{(m)}, \ldots, \alpha_{mm}\vec{e}_m^{(m)}].$$

  Die Diagonalmatrix $[\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m]$ heißt *Einheitsmatrix*, sie wird durch E (und wenn nötig durch E_m) bezeichnet.

19.5. Rechnen mit Matrizen

1. $A, B \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
   Definition. *(motiviert durch den Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen)*

$$\begin{aligned}
A = B &:\Leftrightarrow (A)_{lk} = (B)_{lk} \ \forall l, k \\
A + B \in \mathbb{C}^{(m,n)} &\leftrightarrow (A+B)_{lk} := (A)_{lk} + (B)_{lk} \ \forall l, k \\
\lambda A \in \mathbb{C}^{(m,n)} &\leftrightarrow (\lambda A)_{lk} := \lambda (A)_{lk} \ \forall l, k \\
\overline{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)} &\leftrightarrow (\overline{A})_{lk} := \overline{(A)_{lk}} \ \forall l, k \\
A^\top \in \mathbb{C}^{(n,m)} &\leftrightarrow (A^\top)_{lk} := (A)_{kl} \ \forall l, k
\end{aligned}$$

   $A^\top$ *heißt* die zu A transponierte Matrix

$$A^* \in \mathbb{C}^{(n,m)} \leftrightarrow (A^*)_{lk} = (\overline{A})_{kl}$$

   Das bedeutet $A^* = (\overline{A})^\top$. A^* *heißt* die zu A adjungierte Matrix

2. Es gelten (Übung selbst)

$$\begin{aligned}
(\overline{A})^\top &= \overline{(A^\top)}, & & \\
(A+B)^\top &= A^\top + B^\top, & (A+B)^* &= A^* + B^* \\
(\lambda A)^\top &= \lambda A^\top, & (\lambda A)^* &= \overline{\lambda} A^* \\
(A^\top)^\top &= A, & (A^*)^* &= A
\end{aligned}$$

3. $A \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ heißt $\begin{cases} \textit{hermitesch}, \text{ falls } A = A^* \\ \textit{symmetrisch}, \text{ falls } A = A^\top \end{cases}$ gilt.

   Die zu (Beispiel 19.1, 1) $P_{\vec{a}} : (\mathbb{R}^3; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)) \to (\mathbb{R}^3; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ gehörende $(3,3)$-Matrix $A = (a_j a_k)_{j,k=1,2,3}$ ist symmetrisch.

   Für $A \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ ist $A + A^\top$ symmetrisch.

4. Eine (m,m)-Matrix A mit $A = -A^\top$ heißt *schiefsymmetrisch.*

   Die Matrix zu Beispiel 2), 19.1 ist schiefsymmetrisch (siehe Seite 19)

   Für $A \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ ist $A - A^\top$ schiefsymmetrisch.

   Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ lässt sich in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegen:

   $$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top).$$

5. Das *Produkt* AB für $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}, B \in \mathbb{C}^{(n,l)}$ ist die (m,l)-Matrix mit

   $$(AB)_{js} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk}(B)_{ks}, \quad j = 1, \ldots, m, \; s = 1, \ldots, l \tag{P}$$

   Diese Definition wird so motiviert: Ist A die Darstellungsmatrix von $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ und B die Darstellungsmatrix von $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^l, \mathbb{C}^n)$ (in allen $\mathbb{C}^k$ ist jeweils die kanonische Basis gewählt), so ist AB die Darstellungsmatrix von $f \circ g$. Schreibt man diese Vorgaben gemäß 19.3, 1. auf, so erhält man (P).

6. Zu 5. Bemerkungen, Beispiele, Ergänzungen.

   a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: $AB = 0, BA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

   b) $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}, B \in \mathbb{C}^{(n,l)}$:

   $$\begin{aligned} (AB)^\top &= B^\top A^\top \\ (AB)^* &= B^* A^*. \end{aligned}$$

   c) A, B, C seien Matrizen jeweils eines Typs, so dass die folgenden Produkte und Summen definiert sind. Es gelten:

   $$\begin{aligned} ABC &= (AB)C = A(BC) \\ (A+B)C &= AC + BC \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned} \tag{*}$$

d) $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}, \vec{x} \in \mathbb{C}^n$: $A\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{a}_k$ ($A\vec{x} \in \mathrm{Lin}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$). Es folgt

i. $\vec{x} \mapsto A\vec{x},\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist lineare Abbildung

ii. $A\vec{e}_r^{(n)} = \vec{a}_r$ (die r-te Spalte von A) und
$(\vec{e}_j^{(m)})^\top A = j$-te Zeile von A $(= (A^\top \vec{e}_j^{(m)})^\top)$), also
$(\vec{e}_j^{(m)})^\top A \vec{e}_r^{(n)} = (A)_{jr}$.

iii. $A \in \mathbb{C}^{(m,n)},\ B \in \mathbb{C}^{(n,l)},\ B = [\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l] \Rightarrow AB = [A\vec{b}_1, \ldots, A\vec{b}_l]$.

e) E_n sei die (n,n)-Einheitsmatrix, $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$:

$$E_n A = A E_n = A.$$

f) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^\top \vec{y} = \vec{y}^\top \vec{x}$$

Dabei ist $\cdot$ der Punkt des Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ und das Verknüpfungszeichen der Matrixmultiplikation wird einfach weggelassen.

$$\vec{x}^\top \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$

Wir schreiben $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^\top \vec{y}$. Mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ rechnet man nach:

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^\top \vec{y} \rangle$$

g) Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^* \vec{y} = \vec{y}^* \vec{x}$$

Mit $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{y}^* \vec{x}$ und $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ sieht man:

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^* \vec{y} \rangle$$

h) Wird $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ bzgl. der Standardbasen durch $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ dargestellt, so gilt

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \text{ für } x \in \mathbb{C}^n.$$

20. Lineare Gleichungssysteme, der Gaußsche Algorithmus

20.1.

Gegeben sind die Matrix $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$. Gesucht sind $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit

$$A\vec{x} = \vec{y} \tag{1}$$

$\vec{y} \neq \vec{0}$: (1) ist inhomogen , $\vec{y} = \vec{0}$: (1) ist homogen.

Diese Matrixgleichung beinhaltet m skalare Gleichungen für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n$. Die l-te Gleichung lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j = y_l, \quad l = 1, \dots, m$$

Wir haben $(A)_{lj} = a_{lj}$ gesetzt. Mit $A\vec{e}_j^{(n)} = \vec{a}_j$ schreibt sich (1) so:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k x_k = \vec{y} \tag{2}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Bild}(A) \leq \min(n, m)$.

Mit 19.2/ Satz 3 haben wir $\dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Bild}(A) = n$. $\Rightarrow$

Satz 1. *Ist $m < n$, so besitzt das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen (das sind Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$).*

Satz 2. *Es gilt*

$$\text{(1) ist lösbar } \Leftrightarrow \vec{y} \in \operatorname{Bild}(A) \Leftrightarrow \vec{y} \in \operatorname{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

Anders ausgedrückt bedeutet das:

$$\text{(1) ist nicht lösbar } \Leftrightarrow \vec{y} \notin \operatorname{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

$\mathcal{L}_{\vec{y}}$ bezeichnet die Lösungsmenge (= die allgemeine Lösung) der Gleichung (1):

$$\vec{x} \in \mathcal{L}_{\vec{y}} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$$

$\mathcal{L}_{\vec{0}} = \operatorname{Kern}(A)$ ist dann die allgemeine Lösung des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$. $\mathcal{L}_{\vec{0}}$ ist ein VR.

Satz 3. *Es sei $\vec{x}_p \in \mathcal{L}_{\vec{y}}$ gegeben. Dann gelten:*

1. $\vec{x}_0 + \vec{x}_p \in \mathcal{L}_{\vec{y}}$ *für jedes* $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$
2. *Jedes* $\vec{x} \in \mathcal{L}_{\vec{y}}$ *hat die Form* $\vec{x}_0 + \vec{x}_p$ *mit* $\vec{x}_0 \in \mathcal{L}_{\vec{0}}$.
3. $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \{\vec{x}_p\} \Leftrightarrow \operatorname{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$.

$\mathcal{L}_{\vec{y}}$ erhält man so:

1. *Berechne* Kern(A). Setzt man $r = \dim \operatorname{Bild}(A)$ (=Anzahl der l.u. Spalten von A), so gilt $\dim \operatorname{Kern}(A) = n-r$. Es sind $n-r$ l.u. Lösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-r}$ der Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ zu berechnen. Es ist dann $\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Lin}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-r})$.
2. Berechne $\vec{x}_p$ mit $A\vec{x}_p = \vec{y}$. Jede Lösung $\vec{x} \in \mathcal{L}_{\vec{y}}$ hat dann die Form

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \sum_{j=1}^{n-r} \lambda_j \vec{x}_j \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{C}.$$

(Hierfür schreiben wir auch $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \vec{x}_p + \mathcal{L}_{\vec{0}}$.)

20.2. Der Rang einer Matrix

$A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$.

$$\begin{aligned} s := \text{Spaltenrang von } A &= \text{Maximalzahl l.u. Spalten von } A \\ &= \dim(\operatorname{Bild}(A)) \leq \min(m,n), \\ t := \text{Zeilenrang von } A &= \text{Maximalzahl l.u. Zeilenvektoren von } A \\ &= \dim(\operatorname{Bild}(A^\top)) \leq \min(m,n) \end{aligned}$$

Bearbeitung von A mittels *elementarer Zeilenumformungen*: (Mit $z_1, \ldots, z_m$ werden die Zeilen bezeichnet)

(Z1) $z_j \leftrightarrow z_k$ (Vertausche j-te und k-te Zeile)

(Z2) $z_j \to \alpha z_j$ ($\alpha \neq 0$) (Multipliziere j-te Zeile mit α)

(Z3) $z_j \to z_j + \alpha z_k$ $(j \neq k)$ (Addiere αz_k zu z_j)

(Analog für Spaltenumformungen)

Satz 4. *Durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen werden t und s nicht verändert.*

Satz 5. *Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilennormalform ((ZN) / unten) transformieren.*

Beweis. *Induktion.*

Aus (ZN) liest man s und t ab und, dass stets $s = t$ gilt. Diese eine Matrix charakterisierende Zahl $(s = t)$ wird *Rang der Matrix A* genannt: Es wird $\operatorname{rang}(A)(= s = t)$ geschrieben.

Wegen $s = \dim \operatorname{Bild}(A)$, $t = \dim \operatorname{Bild}(A^\top)$ hat man

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^\top)$$

Definition (von Zeilennormalform (ZN))**.** *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ mit den Einträgen $(A)_{lk} = a_{lk}$ besitzt* Zeilennormalform, *wenn sie folgende Eigenschaften hat:*

(Z1) Unterhalb der Diagonalen stehen nur Nullen, d.h.

$$a_{lk} = 0 \text{ für } l > j$$

(Z2) Das erste nicht-verschwindende Element jeder Zeile (von links gesehen) ist gleich 1.

(Z3) Ist a_{lk} das erste nicht-verschwindende der l-ten Zeile, so ist

$$a_{jk} = 0 \text{ für alle } j \neq l,$$

d.h. oberhalb und unterhalb des Elementes $a_{lk} = 1$ stehen lauter Nullen, in der k-ten Spalte.

Beispiel. *Die Matrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat ZN. An den mit $*$ markierten Stellen können Nullen oder nichtverschwindende Elemente stehen.

20.3. Lösen von $A\vec{x} = \vec{y}$

Die erweiterte Matrix $(A, \vec{y})$ wird auf (ZN) $(\tilde{A}, \tilde{\vec{y}})$ transformiert (Gaußscher Algorithmus):

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_{k_1} & \cdots & x_{k_2} & \cdots & x_{k_3} & \cdots & \cdots & x_{k_r} & \cdots & \tilde{\vec{y}} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & \tilde{y}_1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & & & \vdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & * & 0 & * & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & 0 & & \tilde{y}_{r-1} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & * & \tilde{y}_r \\
\vdots & & & & & & & & & & 0 & 0 & \tilde{y}_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \tilde{y}_m
\end{array}
\tag{ZN}
$$

Aus (ZN) liest man alles bzgl Lösungen von (1) ab, wenn man sich vorher klargemacht hat:

Satz 6. *$\mathcal{L}_{\vec{y}}$ sei die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{y}$ und $\mathcal{L}_{\tilde{\vec{y}}}$ die von $\tilde{A}\vec{x} = \vec{y}$. Es gelten: $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \mathcal{L}_{\tilde{\vec{y}}}$ und: $A\vec{x} = \vec{0}$ gehört zu $\tilde{A}\vec{x} = \vec{0}$.*

Lösen von $A\vec{x} = \vec{y}$ mit (ZN)

Man liest ab:

(Z1) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A}) = r =$ Anzahl der nicht-verschwindenden Zeilen (Das sind die, die mit einer 1 beginnen)

(Z2) Gilt $\tilde{y}_l \neq 0$ für ein $l \geq r+1$, so ist die l-te Zeile von (ZN) widersprüchlich: $A\vec{x} = \vec{y}$ ist nicht lösbar.

Das System sei lösbar (also $\tilde{y}_{r+1} = \cdots = \tilde{y}_m = 0$): Löse die ersten r Zeilen nach $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ auf:

$$x_{k_j} = \tilde{y}_j - \sum_{l > k_j} \tilde{a}_{jl} x_l, \quad j = 1, \ldots, r \tag{ZN}$$

$$x_{k_j} = - \sum_{l > k_j} \tilde{a}_{jl} x_l, \quad j = 1, \ldots, r \tag{ZNH}$$

((ZNH) entsteht aus der homogenen Gleichung

Gemäß Satz 3 brauchen wir ein $\vec{x}_p \in \mathcal{L}_{\vec{y}}$ und $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-r}$ (l.u) aus $\mathcal{L}_{\vec{0}}$.

- $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ erhält man aus (ZN), wenn man alle x_l rechts Null setzt. Es folgt dann $x_{k_j} = \tilde{y}_j$ $(j = 1, \dots, r)$.
- $n - r$ l.u. Lösungen $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-r}$ erhält man aus (ZNH) so:

  Die $n - r$ Koordinaten rechts werden nacheinander so gewählt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Die restlichen r Koordinaten werden aus (ZNH) berechnet.

Beispiel. *$n = m = 4$, $A\vec{x} = \vec{y}$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$\to (\tilde{A}, \tilde{\vec{y}})$*:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{ZN}$$

Man liest ab: $r = 2, n - r = 2,\ k_1 = 1, k_2 = 3,\ \dim \mathcal{L}_{\vec{0}} = 2$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 - 3x_2 + 5x_4 \\ x_3 &= -3 + 2x_4 \end{aligned} \tag{ZN}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 5x_4 \\ x_3 &= 2x_4 \end{aligned} \tag{ZNH}$$

$\vec{x}_p$*: Setze in (ZN) rechts* $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 = x_3$*, also*

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ l.u. Lösungen aus $\mathcal{L}_{\vec{0}}$:

$\vec{x}_1$*: Setze in (ZNH) rechts* $\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{(ZNH)}}{\Rightarrow} x_1 = -3, x_3 = 0$*, also*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_2$*: Setze in (ZNH) rechts* $\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \overset{\text{(ZNH)}}{\Rightarrow} x_1 = 5, x_3 = 2.$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung lautet dann:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit beliebigen } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Ein abschließender Satz:

Satz 7. *Es sei* $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & A\vec{x} = \vec{y} \text{ ist für jedes } \vec{y} \in \mathbb{C}^n \text{ eindeutig lösbar} \\ \Leftrightarrow\ & A\vec{x} = \vec{0} \text{ besitzt nur die Lösung } \vec{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{rang}(A) = n \end{aligned}$$

21. Reguläre Matrizen, die zu einer Matrix inverse Matrix

21.1. Reguläre Matrizen

Definition. *$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt* regulär*, falls* $\operatorname{rang}(A) = n$ *gilt. Eine nichtreguläre Matrix heißt* singulär.

Beispiele. *E ist regulär. A regulär $\Leftrightarrow$ $A^\top$ regulär $\Leftrightarrow$ A^* regulär*

Satz 1. *Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & A\vec{x} = \vec{y} \text{ ist für jedes } \vec{y} \in \mathbb{C}^n \text{ eindeutig lösbar} \\ \Leftrightarrow\ & A\vec{x} = \vec{0} \text{ besitzt nur die Lösung } \vec{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{rang}(A) = n \\ \Leftrightarrow\ & A \text{ regulär} \end{aligned}$$

Satz 2. *Sind $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär, so ist AB regulär.*

Satz 3. *Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und AB sei regulär. Dann sind A und B regulär.*

21.2. Die zu A inverse Matrix A^{-1}

Satz 4. *Sind $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär, so gibt es genau eine reguläre (n, n)-Matrix X mit $AX = B$.*

$\Rightarrow$ Ist A regulär, so gibt es genau eine reguläre Matrix X, die $AX = E$ erfüllt. Dies gibt die folgende Definition:

Definition. *Es sei A regulär. A^{-1} ist die reguläre Matrix, die $AA^{-1} = E$ erfüllt. A heißt in diesem Fall* invertierbar *und A^{-1} die zu A inverse Matrix.*

Satz 5. *Für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gelten:*

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. $A^{-1}A = E$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
5. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär. Die Zeilennormalform von A ist E.

A^{-1} *kann man so berechnen:* Nimm an E die Zeilenumformungen vor, die an A zur Transformation auf Normalform durchgeführt werden müssen. Das Ergebnis ist A^{-1}.

22. Determinanten

22.1. Permutationen

$S_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist Permutation der Zahlen } 1, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\phi \in S_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ ist bijektiv.}$$

S_n enthält $n!$ Elemente (HMI).

Schreibweise: $\phi \in S_n$:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \phi(1) & \phi(2) & \dots & \phi(n) \end{pmatrix} \text{ oder } \phi = (\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n))$$

$\phi, \psi \in S_n \Rightarrow$

$$\phi \circ \psi = (\phi(\psi(1)), \phi(\psi(2)), \dots, \phi(\psi(n))) \in S_n$$

$\text{id} \in S_n$:

$$\text{id} = (1, 2, \dots, n) \in S_n$$

Beispiele. $\phi = (1, 3, 2, 4), \psi = (2, 4, 1, 3)$

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi &= (\phi(2), \phi(4), \phi(1), \phi(3)) = (3, 4, 1, 2) \\ \psi \circ \phi &= (\psi(1), \psi(3), \psi(2), \psi(4)) = (2, 1, 4, 3) \\ \phi^{-1} &= (1, 3, 2, 4) \\ \psi^{-1} &= (3, 1, 4, 2) \end{aligned}$$

Definition. *$\tau \in S_n$ heißt* Transposition*, falls es $p, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ so gibt, dass $\tau(j) = j \ \forall j \neq p, k$ und $\tau(p) = k$ und $\tau(k) = p$. Schreibweise: $\tau = (p\ k)$.*

1. Im Beispiel oben ist $\phi = (3\ 2)$
2. Es gilt mit $\phi = (1, 3, 2, 4)$: $(1\ 2) \circ \phi = (2, 3, 1, 4)$.
3. Für jede Transposition τ gilt $\tau^2 = \tau \circ \tau = \text{id}$, also $\tau = \tau^{-1}$. In obigem Beispiel ist $\phi = \phi^{-1}$.

Satz 1. *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden:* $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$.

Beispiel. $(5, 3, 4, 1, 2) = (1\ 5) \circ (2\ 3) \circ (3\ 4) \circ (4\ 5) = (1\ 2) \circ (2\ 4) \circ (2\ 3) \circ (1\ 5)$.

Satz 2. *Hat man für $\sigma \in S_n$ zwei Zerlegungen in Transpositionen: $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k = \tilde{\tau}_1 \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_l$, so sind die Zahlen k und l entweder beide gerade oder beide ungerade.*

Definition. $\sigma \in S_n$. *Das* Vorzeichen von σ, $\operatorname{sign}(\sigma)$, *ist so definiert:*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k,$$

wenn $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ eine Darstellung als Produkt von Transpositionen ist.

Satz 3. *Es gelten*

1. $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ *für jede Transposition* $\tau \in S_n$
2. $\operatorname{sign}(\sigma \circ \phi) = \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\phi), \ \sigma, \phi \in S_n$
3. $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1}), \ \sigma \in S_n$
4. $\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{j<k} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k}, \ \sigma \in S_n$.

22.2. Determinante

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{C}^{(n,n)} &\to \mathbb{C} \\ A &\mapsto \det A \text{ (gelesen: \textit{die Determinante von } } A) \end{aligned}$$

Wir fassen det als Funktion der Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ von A auf. $\det(A) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ wird durch folgende Eigenschaften festgelegt:

(det 1) $\det(E) = \det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$

(det 2) det ist linear als Funktion jeder Spalte:

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{l-1}, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \vec{v}_k, \vec{a}_{l+1}, \ldots, \vec{a}_n) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{l-1}, \vec{v}_k, \vec{a}_{l+1}, \ldots, \vec{a}_n)$$

für $l = 1, \ldots, n$.

(det 3) Vertauschen zweier Spalten ändert das Vorzeichen von $\det(A)$: Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)}, \ldots, \vec{a}_{\tau(n)}) = \operatorname{sign}(\tau) \det(A)$$

Beispiele. *Prüfe nach, dass folgende Zuordnungen für $n = 2, 3$ im obigen Sinn Determinanten sind:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \mapsto \det(A) := \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \qquad (n = 2)$$

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \mapsto \det(A) = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 \qquad (n = 3)$$

Folgerungen (aus (det1), (det2), det3)). *(A1)* $\det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \det(A)$, $\sigma \in S_n$.

(A2) $\det(\vec{e}_{\sigma(n)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)$, $\sigma \in S_n$.

(A3) Aus $A\vec{e}_j = A\vec{e}_k$ $(j \neq k)$ *folgt* $\det(A) = 0$.

(A4) Für $B = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k + \lambda \vec{a}_j, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n]$ $(j \neq k, \lambda \in \mathbb{C})$ *gilt* $\det(B) = \det(A)$.

(A5) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(A6)

Satz 4 (Folgerung aus (det2), (A3), (A2))**.** *Für* $A = (\alpha_{jk}) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ *gilt*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}.$$

Zur Übung schreibe diese Formel explizit für $n = 2, 3, 4$ auf.

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} &= \det(\vec{e}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \\
&= \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\sigma') \alpha_{\sigma'(2)2} \dots \alpha_{\sigma'(n)n} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dabei sind hier S_{n-1} alle Permutationen der Zahlen $2, \dots, n$.

Satz 5.

$$\det(A) = \det(A^\top) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{n\sigma(n)}$$

(A7) A_{jk} bezeichnet die $(n-1, n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Das Beispiel vorher gibt $\det(\vec{e}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det A_{11}$.

Mit

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_k) = (-1)^{k+j} \det(A_{jk})$$

erhält man den

Satz 6 (Entwicklungssatz)**.**

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \alpha_{jk} \det(A_{jk}) && \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \alpha_{kj} \det(A_{kj}) && \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Zeile)} \end{aligned}$$

(A8) (Folgerung aus Satz 1)

Satz 7 (Determinantenmultiplikationssatz)**.** *$A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Es gilt*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(A9) Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär, so gilt

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

(A10) A ist regulär $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

(A11) Der (n,n)-Matrix A wird die (n,n)-Matrix $\mathrm{adj}(A)$ (die Adjunkte von A) *zugeordnet durch*

$$(\mathrm{adj}(A))_{kl} := (-1)^{k+l} \det(A_{lk}) \quad (k, l = 1, \ldots, n)$$

Satz 8. *Es gilt*

$$\mathrm{adj}(A)A = E \det(A)$$

Folgerung. *Ist A regulär, so gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A)$$

(A12) Die Cramersche Regel *(mit der Folgerung aus Satz 5) Es sind $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, A regulär und $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gegeben. $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ (die Lösung von $A\vec{x} = \vec{y}$) erhält man so: $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$,*

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{y}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n), \quad k = 1, \ldots, n$$

23. Orthogonale Matrizen

23.1. Beispiele

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23.2.

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt *orthogonal*, falls $A^\top A = E$ gilt.

A_1, A_2, A_3, A_4 aus 23.1 sind orthogonale Matrizen.

1. Ist A orthogonal, so gilt $|\det(A)| = 1$. A ist insbesondere regulär.
2. A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^\top = A^{-1} \Leftrightarrow AA^\top = E \Leftrightarrow A^{-1}$ ist orthogonal $\Leftrightarrow A^\top$ ist orthogonal.
3. Sind A und B orthogonale (n,n)-Matrizen, so ist AB orthogonal.
4. Sind AB und B (A) orthogonal, so ist A (B) orthogonal.

23.3.

Satz 1. $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. *Es sind äquivalent:*

1. *A ist orthogonal*
2. $\vec{x}^\top \vec{y} = (A\vec{x})^\top (A\vec{y})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

3. $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

4. $\|A\vec{x} - A\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

5. *Die Spalten von A bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$*

6. *Die Zeilen von A bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$*

7. *Ist $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $(A\vec{b}_1, \ldots, A\vec{b}_n)$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$.*

Satz 2. *Jede orthogonale $(2,2)$-Matrix ist von einer der beiden Formen*

$$D = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \tag{a}$$

$$S = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \tag{b}$$

mit $s^2 + c^2 = 1$. Die Abbildung $\vec{x} \mapsto S\vec{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreibt eine Spiegelung *an der Gerade durch 0, die die Richtung $\vec{v} = \binom{c+1}{s}$ hat (das ist die Gerade durch 0 mit der Steigung $\tan\phi/2$ mit $c = \cos\phi, s = \sin\phi$).*

24. Eigenwertprobleme, Diagonalisieren von Matrizen

24.1. Beispiele

1. (siehe vorher Satz 2/ Kap. 23) Mit $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$ hat man:

$$A \begin{pmatrix} \cos\phi + 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi + 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$A \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi + 1 \end{pmatrix}$$

2. Zu $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ ist $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $A\vec{x} = \vec{y}$ gesucht. Mit einer regulären Matrix C setze $\vec{x}' := C^{-1}\vec{x}$, $\vec{y}' := C^{-1}\vec{y}$. $A\vec{x} = \vec{y}$ wird zu einer Gleichung für $\vec{x}'$:

$$C^{-1}AC\vec{x}' = \vec{y}'$$

Ist $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix, so erhält man sofort $\vec{x}'$ und dann auch $\vec{x} = C\vec{x}'$.

24.2. Definition

Es seien V ein VR und $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert (EW) von T*, falls es ein $x \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $Tx = \lambda x$. Ein derartiges Element x heißt *Eigenvektor (EV) zum EW λ*.

Ist λ ein EW von T, so heißt $E(\lambda) := \mathrm{Kern}(T - \lambda \mathrm{id}) = \{0\} \cup \{x \mid x \text{ EV zu } \lambda\}$ der *Eigenraum von T zum EW λ*.

$\dim E(\lambda)$ heißt die *geometrische Vielfachheit $\gamma(\lambda)$ von λ*.

Bemerkungen, Beispiele. *1. Zu 1.) / 24.1: Besitzt A n l.u. Eigenvektoren* $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

mit den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*, so ist mit* $C = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$

$$C^{-1}AC = [\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. *Ist für* $T \in \mathcal{L}(V,V)$ $\operatorname{Kern}(T) \neq \{0\}$*, so ist jeder Vektor* $x \in \operatorname{Kern}(T) \setminus \{0\}$ *EV zum EW* $\lambda = 0$

3. *Für die lineare Abbildung* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2,\ T(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$ *ist jeder Vektor* $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ *EV zum EW* $\lambda = 1$ *und jeder Vektor* $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ *EV zum EW* $\lambda = -1$

4. $D : C^\infty(I) \to C^\infty(I),\ Df = f'$*. Eigenvektoren (heißen in diesem Zusammenhang auch Eigenfunktionen) sind* $f(x) = ce^{\lambda x}$ *(c konst* $\neq 0$*) mit EW* λ*.*

24.3.

Satz 1. *V sei VR,* $T \in \mathcal{L}(V,V)$*.* $u_1, \dots, u_l$ *seien EVen und die zugehörigen EWe* $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ *seien verschieden. Dann sind die EVen* $u_1, \dots, u_l$ *l.u.*

Folgerung. *Gilt* $\dim(V) = n$*, so besitzt* $T \in (V,V)$ *höchstens n verschiedene EWe.*

Satz 2. $T \in \mathcal{L}(V,V),\ \dim(V) = n$*. Dann hat man:*

1. *Besitzt T n l.u. EVen* $u_1, \dots, u_n$ *mit den EWen* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*, so ist die Darstellungsmatrix für* $T : (V, (u_1, \dots, u_m)) \to (V, (u_1, \dots, u_m))$ *die Matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{*}$$

2. *Gibt es in V eine Basis* $(v_1, \dots, v_n)$ *bzgl. der* $T \in \mathcal{L}(V,V)$ *die Darstellungsmatrix* $\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{smallmatrix}\right) = [\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n]$ *besitzt, so gelten*

$$Tv_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n$$

24.4. Das charakteristische Polynom der Matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$

Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{x} \neq 0, \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Es gilt (siehe z.B. Satz 7/ Kap. 20 und A10, 22.2):

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist EW von } A &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A - \lambda E) < n \\ &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0 \end{aligned}$$

$\chi_A(\lambda)$ heißt *das charakteristische Polynom von* A. Die EWe von A sind die Nullstellen von χ_A.

Satz 3. *Es gilt*

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\sum_{j=1}^{n} a_{jj} + \ldots + \det A$$

($\sum_{j=1}^n a_{jj} =: \operatorname{Spur}(A)$*)*

Zu einem EW λ von A, d.h. zu einer Nullstelle λ von χ_A, werden die zugehörigen EVen aus dem homogenen linearen Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ berechnet.

Hat A die verschiedenen EWe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leq n)$, so gibt es Zahlen m_j $(j = 1, \ldots, k) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^k m_j = n$ und

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

$m_j := m(\lambda_j)$ heißt die *algebraische Vielfachheit* λ_j.

Satz 4. *Es gelten (das liest man aus Satz 3 ab):*

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{m_j} \quad \textit{und} \quad \operatorname{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_j.$$

Bemerkung. *Es sei* λ *ein EW mit der geometrischen Vielfachheit* $\gamma(\lambda)$ *und der algebraischen Vielfachheit* $m(\lambda)$. *Es gilt*

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Aus $\sum_{j=1}^k m(\lambda_j) = n$ *folgt: Eine* (n, n)*-Matrix besitzt maximal* n *l.u. EVen.*

24.5.

Es sei $T \in \mathcal{L}(V,V), \dim(V) = n$. $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$, $B_2 = (u_1, \ldots, u_n)$ seien Basen von V. Es gibt dann eine reguläre (n,n)-Matrix $C = ((C)_{jk})$ mit

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} (C)_{kj} v_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

Satz 5. *Ist A die Darstellungsmatrix für*

$$T : (V; B_1) \to (V; B_1)$$

und B die für

$$T : (V; B_2) \to (V; B_2),$$

so gilt

$$B = C^{-1} A C.$$

Satz 6. *Gilt für zwei (n,n)-Matrizen A und B mit einer regulären Matrix C die Beziehung*

$$B = C^{-1} A C,$$

so sind A und B Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung.

24.6. Diagonalisieren von Matrizen

Definition. *$A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißen* ähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ so gibt, dass*

$$B = C^{-1} A C$$

gilt.

Satz 7. *(Sätze 5/6) Zwei (n,n)-Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung sind*

Satz 8. *Für ähnliche Matrizen A, B gilt $\chi_A = \chi_B$. Sie besitzen also dieselben EWe. Insbesondere gelten:* $\det(A) = \det(B)$ *und* $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

Definition. *A heißt* diagonalisierbar*, wenn A zu einer Diagonalmatrix $D = [p_1 \vec{e}_1, \ldots, p_n \vec{e}_n]$ ähnlich ist.*

Satz 9. *Es gilt für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$*

$$\begin{aligned} & A \text{ ist diagonalisierbar} && (1)\\ \Leftrightarrow\ & A \text{ besitzt nl.u.EVen} && (2)\\ \Leftrightarrow\ & \text{für jeden EW stimmen die geom. und die algebr. Vielfachheit überein.} && (3) \end{aligned}$$

(Verwende die Bemerkung am Ende von 24.4, Verwende Satz 2) Zu (2) $\Rightarrow$ (1): Sind $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ n l.u. EVen, so gilt mit $C = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$: $C^{-1}AC = D$ mit $D\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k$ und $A\vec{x}_k = \lambda_k \vec{x}_k$.

Z: Diagonalisieren der (n, n)-Matrix A

1. Berechne alle EVen
2. Gibt es n l.u. EVen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, so ist $C = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ eine Matrix, mit der A auf Diagonalform transformiert wird.
3. Gibt es weniger als n l.u. EVen, so ist A nicht diagonalisierbar.

24.7. Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar

(19.5, 3) $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt *hermitesch*, falls $A = A^* (= \overline{A}^\top)$.

($A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^\top$.)

Satz 10. *Die EWe einer hermiteschen Matrix A sind reell und EVen zu verschiedenen EWen sind zueinander orthogonal.*

(Man benötigt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^\top \overline{\vec{y}},\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle$ 19.5 6., 7))

Satz 11. *Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ hermitesch ($\in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch), so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine unitäre (orthogonale) Matrix $C \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ($\in \mathbb{R}^{(n,n)}$) derart, dass*

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j) \text{ und}$$

$$C^*AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \left(C^\top AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$$

gelten. Die j-te Spalte von C ist EV mit EW λ_j.

25. Definite Matrizen

Für $A \in \mathbb{R}^{(n,n)},\ A = A^\top$ wird $q(\vec{x}) := \vec{x}^\top A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet.

Definition. 1. *A heißt* positiv definit, *falls $q(\vec{x}) > 0\ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ gilt. A heißt* positiv semidefinit, *falls $q(\vec{x}) \geq 0\ \forall \vec{x}$ gilt.*

2. *A heißt* negativ (semi)definit, *falls $-A$ positiv (semi)definit ist.*

3. *A heißt* indefinit, *falls es $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $q(\vec{x}_1)q(\vec{x}_2) < 0$ gibt.*

Satz 1. *Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $A = A^\top$. Es gelten:*

1. *A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EWe sind positiv*
2. *A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ die EWe sind nicht negativ*
3. *A ist indefinit $\Leftrightarrow$ es gibt einen positiven und einen negativen EW.*

Der Satz 1 im Fall $n = 2$ sagt aus:

Satz 2. *Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \neq 0, \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ gelten:*

1. *A ist positiv definit $\Leftrightarrow a > 0$ und $ac - b^2 > 0$*
2. *A ist negativ definit $\Leftrightarrow a < 0$ und $ac - b^2 > 0$*
3. *A ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow a + c \geq 0$ und $ac - b^2 \geq 0$*
4. *A ist indefinit $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$*

26. $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Stetigkeit

26.1.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Def:

$$\begin{aligned} \vec{x} \to \vec{a} &\Leftrightarrow \|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2 \to 0 \\ &\Leftrightarrow x_j \to a_j \ (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ $(r > 0)$. $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offene* Menge, wenn es zu jedem Punkt $\vec{a} \in S$ eine Zahl $r > 0$ so gibt, dass $B(\vec{a}, R) \subset S$ gilt.

$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sei gegeben.

$$\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{e}_j^{(m)} =: f_j(\vec{x}), \ f_j : S \to \mathbb{R} \ (j = 1, \ldots, n)$$

heißen die *Koordinatenfunktionen von* $\vec{f}$.

26.2.

Es ist $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben und $\vec{a} \in S$.

$$\begin{aligned} \vec{f} \text{ heißt } \textit{in } \vec{a} \textit{ stetig} &\overset{Def}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) \\ &\Leftrightarrow \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta(\varepsilon, \vec{a}) > 0 \text{ derart,} \\ &\quad\ \text{dass aus } \vec{x} \in S,\ \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \text{ folgt: } \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\vec{f}$ heißt *auf* S *stetig*, wenn $\vec{f}$ in jedem Punkt von S stetig ist.

Satz 1. *Sind* $\vec{f}$ *und* $\vec{g} : S \to \mathbb{R}^m$ *in* $\vec{a} \in S$ *stetig, so sind* $\vec{f} + \vec{g}, \lambda\vec{f}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $\vec{f} \cdot \vec{g}$ *in* $\vec{a}$ *stetig.*

Satz 2. $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in S$. *Es gilt:*

$\vec{f}$ *ist in* $\vec{a}$ *stetig* $\Leftrightarrow$ *jede Koordinatenfunktion* f_j $(j = 1, \ldots, m)$ *ist in* $\vec{a}$ *stetig.*

Satz 3. $\vec{g} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} : \vec{g}(S) \to \mathbb{R}^p$. *Es seien* $\vec{g}$ *in* $\vec{a} \in S$ *und* $\vec{f}$ *in* $\vec{g}(\vec{a})$ *stetig. Dann ist* $\vec{f} \circ \vec{g}$ *in* $\vec{a}$ *stetig.*

Beispiele. *1.* $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ *sei konstante Matrix.*

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \vec{f}(\vec{x}) := A\vec{x},$$

ist auf $\mathbb{R}^n$ *stetig.*

2.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ist in $(0,0)$ *nicht stetig, obwohl* $\vec{f}$, *eingeschränkt auf eine beliebige Gerade durch* $(0,0)$, *im Nullpunkt stetig ist.*

3.

$$\vec{f}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix},\ (x,y) \neq (0,0)$$

ist überall stetig und lässt sich durch den Wert $\vec{0}$ *in* $(0,0)$ *so definieren, dass* $\vec{f}$ *auf ganz* $\mathbb{R}^2$ *stetig wird.*

27. Kurven in $\mathbb{R}^n$, Die Bogenlänge

27.1.

Eine (parametrisierte) *Kurve im* $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{r}: I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top \end{aligned}$$

$\vec{r}$ heißt *stetig diff'bar* ($\vec{r} \in C^1(I)$), falls die Koordinatenfunktionen $x_j : I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar sind. Es gilt für $t_0 \in I$:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(I)$ heißt *die Spur von* $\vec{r}$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ heißt *Parameterdarstellung der Kurve.*

Zu einer Kurve gehört eine *Orientierung*: $t_1 < t_2$ induziert die Richtung $\vec{r}(t_1) \to \vec{r}(t_2)$.

Ist $I = [a, b]$, so heißt $\vec{r}(a)$ *Anfangspunkt* und $\vec{r}(b)$ *Endpunkt* der Kurve.

Gilt $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, so heißt die Kurve *geschlossen.*

Ein Punkt $\vec{r}_d$ mit $\vec{r}_d = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$ heißt *Doppelpunkt.* Ist $\vec{r}$ injektiv, so hat die Kurve keinen Doppelpunkt. Eine solche Kurve heißt *Jordankurve.* Eine geschlossene Jordankurve hat den Anfangs- (=Endpunkt) als einzigen Doppelpunkt.

Beispiele. *1.* $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$, $-1 \leq t \leq 1$, *ist eine Jordankurve*

2. $\vec{r}(t) = (2\cos t - 1)\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$, $0 \leq t \leq 2$ *ist geschlossen, aber keine Jordankurve. Doppelpunkte?*

3. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t^3-t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ *ist keine Jordankurve. Doppelpunkte?*

Es sei $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig diff'bare Kurve. Gilt für $t_0 \in I$ $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, so ist

$$\vec{g}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)(t - t_0), \ t \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung für die *Tangente an* $\vec{r}$ in $\vec{r}(t_0)$. $\vec{r}'(t_0)$ heißt *Tangentialvektor* der Kurve an der Stelle $\vec{r}(t_0)$.

Die C^1-Kurve $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär (glatt)* an der Stelle $t_0 \in I$, wenn $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ gilt.

Beispiele. *1.* $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}, \ -1 \leq t \leq 1.$

2. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

3. $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ f(t) \end{smallmatrix} \right), t \in I$

4. $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} g(t) \\ t \end{smallmatrix} \right), t \in I$

5. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

27.2. Die Länge der Kurve $\vec{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$

Z sei eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$: $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ (siehe auch beim Integral in HMI)

$$l(Z) := \sum_{j=1}^{m} \|\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})\|$$

ist ein Näherungswert für die gesuchte Länge von $\vec{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Die Kurve $\vec{r}$ heißt *rektifizierbar* (besitzt eine Länge), falls $\{l(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$ beschränkt ist. Das Supremum dieser Zahlen $l(Z)$ heißt *die Länge von* $\vec{r}$: $L(\vec{r}) = L_a^b(\vec{r})$.

Satz 1. *Eine C^1-Kurve $\vec{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar ($-\infty < a < b < \infty$). Es gilt*

$$L(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}'(u)\| \, \mathrm{d}u$$

Beispiele. *1.* $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \ -1 \leq t \leq 1.\ L(\vec{r}) = \pi.$

2. $\vec{r}(t) = e^{-t} \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix} \right), \ t \geq 0.\ L(\vec{r}) = \sqrt{2}.$

3. $\vec{r}(t) = (1 + e^{-t}) \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix} \right), \ t \geq 0.$ *Wegen* $L(\vec{r}) \geq \int_0^\infty (1 + e^{-t}) \, \mathrm{d}t$ *gilt* $L(\vec{r}) = \infty.$

27.3. Parameterwechsel

$\vec{r} = \vec{r}(t), \ \vec{r}: I(\text{Intervall}) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sei eine C^1-Kurve. $g: I \to J, \ t \mapsto \tau = g(t)$, heißt eine C^1 *Parametertransformation*, wenn g bijektiv und C^1 und $g^{-1}: J \to I, \ \tau \mapsto$

$t = g^{-1}(\tau)$, ebenfalls aus C^1 ist. Die Kurve $\vec{\rho} : J \to \mathbb{R}^n,\ \vec{\rho}(\tau) := \vec{r}(g^{-1}(\tau))$, heißt eine *Umparametrisierung von $\vec{r}$*. Es gilt $\vec{\rho}(J) = \vec{r}(I)$.

g heißt *orientierungstrue (orientierungsumkehrend)*, falls $g' > 0$ $(g' < 0)$.

Beispiel. $\tau = g(t) := b + a - t,\ g : [a,b] \to [a,b]$. *Die Kurve $\vec{\rho}$: $\rho(\tau) := \vec{r}(b + a - \tau), \tau \in [a,b]$ wird auch durch $\overleftarrow{r}$ bezeichnet.*

Satz 2. *Mit den Bezeichnungen oben sei $I = [a,b],\ J = [\alpha, \beta]$. $\vec{r}$ sei glatte Kurve. Es gilt*

$$(L(\vec{r}) =)\int_a^b \|\vec{r}'(t)\|\,\mathrm{d}\tau = \int_\alpha^\beta \|\vec{\rho}'(\tau)\|\,\mathrm{d}t (= L(\vec{\rho})).$$

27.4. Parametrisieren nach der Bogenlänge s

$\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei glatte Kurve der Länge L,

$$s = g(t) := \int_a^t \|\vec{r}'(u)\|\,\mathrm{d}u,\ a \le t \le b.$$

Die Umparametrisierung von $\vec{r}$ mittels g:

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(g^{-1}(s)),\ 0 \le s \le L$$

heißt die *natürliche Darstellung der Kurve $\vec{r}$*. Sie ist durch $\|\vec{\rho}'(s)\| = 1,\ s \in [0,L]$ gekennzeichnet.

Beispiel. *Die natürliche Darstellung von $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$, ist $\vec{\rho}(s) = \begin{pmatrix} \cos(s/\sqrt{2}) \\ \sin(s/\sqrt{2}) \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ 0 \le s \le 2\pi\sqrt{2}$.*

28. Die Richtungsableitung, Partielle Ableitungen

28.1. Die Richtungsableitung

$S \subset \mathbb{R}^n$ sei eine *offene* Menge (d.h.: zu $\vec{a} \in S$ gibt es ein $r > 0$, so dass $\{\vec{x} \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\} \subset S$ gilt). Weiter sind $g : S \to \mathbb{R},\ \vec{x}_0 \in S$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gegeben.

Definition. *Existiert* $\lim_{h \to 0} 1/h(g(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - g(\vec{x}_0))$, *so heißt dieser Grenzwert* Richtungsableitung von g in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$. *Er wird durch* $(D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0)$ *bezeichnet.*

Gilt $(D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0) > 0$ $((D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0) < 0)$, so wächst (fällt) $g(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

Für ein Vektorfeld $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \vec{x}_0,\ \vec{v}$ wie oben, ist $(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}_0)$ koordinatenweise erklärt:

$$(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}_0)\ \left(= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0))\ \right) = \begin{pmatrix} D_{\vec{v}}f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ D_{\vec{v}}f_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Beispiele. *1.* $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $(D_{\vec{v}}f)(\vec{x}) = 2\vec{x} \cdot \vec{v}$. $(D^2_{\vec{v}}f)(\vec{x}) = (D_{\vec{v}}(D_{\vec{v}}f))(\vec{x}) = 2\|\vec{v}\|^2$.

2. $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ *konstant.* $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. $(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = A\vec{v}$.

28.2. Partielle Ableitungen

$\vec{f}, S$ seien wie oben.

Für $D_{\vec{e}_j}$ schreiben wir D_j und sprechen von der *partiellen Ableitung nach der j-ten Variablen*:

$$(D_j\vec{f})(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\vec{f}(\vec{x} + h\vec{e}_j) - \vec{f}(\vec{x})), \quad j = 1, \ldots, n.$$

$\vec{f}$ heißt *auf S partiell diff'bar*, falls $(D_k f_j)(\vec{x})$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $\vec{x} \in S$ existieren.

$\vec{f}$ heißt *l-mal stetig partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen bis einschließlich der Ordnung l existieren und stetig sind.

Satz 1 (Schwarz). *Ist $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diff'bar, so gelten*

$$D_j D_k f = D_k D_j f$$

auf S für alle j, k.

28.3. Die Jakobi Matrix. Die Funktionaldeterminante

$\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei partiell diff'bar. Die (m, n)-Matrix

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) := [D_1 \vec{f}(\vec{x}), \ldots, D_n \vec{f}(\vec{x})]$$

heißt die *Jakobi Matrix von $\vec{f}$ in $\vec{x}$.*

Ist $m = n$, so heißt $\det(J_{\vec{f}}(\vec{x}))$ die *Funktionaldeterminante von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}$.*

Beispiele. *1.* $\vec{f} : \{(r, \phi) \mid r > 0,\ 0 < \phi < 2\pi\} \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \qquad \text{(ebene Polarkoordinaten)}$$

$$\det(J_{\vec{f}}(r, \phi)) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = r$$

2. $\vec{f} : \{(r, \phi, \theta) \mid r > 0,\ 0 < \phi < 2\pi,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\} \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{f}(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(räumliche Polarkoord., Kugelkoord.)}$$

$$\det(J_{\vec{f}}(r, \phi, \theta)) = r^2 \cos\theta.$$

29. Gradient, Divergenz, Rotation, Laplaceoperator, der ∇-Operator

29.1. Definitionen

Mit $\nabla = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \vec{e}_j D_j$ werden definiert:

$$\nabla f = \mathrm{grad}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ für } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{(Gradient)}$$

$$\nabla^\top \vec{v} \ (= \nabla \cdot \vec{v}) \ = \mathrm{div}\, \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ für } \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{(Divergenz)}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \mathrm{rot}\, \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ für } \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(Rotation)}$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla^\top \nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ für } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \Delta \vec{v} &= (\nabla^\top \nabla) \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ für } \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad \text{(Laplace-Operator)}$$

29.2. Beispiele

1. $\nabla(\|\vec{x}\|) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$
2. $\nabla^\top \vec{x} = n$
3. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$: $\nabla \times \vec{x} = \vec{0}$
4. Mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird mit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $g(\vec{x}) := f(\|\vec{x}\|)$ definiert. Es gilt
$$(\nabla g)(\vec{x}) = f'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$
5. *Produktregeln:*
$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad & \nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g \\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \quad & \nabla \times (f\vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f \nabla \times \vec{v} \\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad & \nabla^\top (f\vec{v}) = (\nabla f)^\top \vec{v} + f \nabla^\top \vec{v} \end{aligned}$$

(Zur Übung formuliere diese Regeln mit den Begriffen grad, div, rot in Satzform)

6. Es sei g wie unter 4. Es gilt

$$(\Delta g)(\vec{x}) = f''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} f'(\|\vec{x}\|)$$

29.3. rot grad, div rot, rot rot, grad div

Satz 1. *Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diff'bare Skalar- bzw. Vektorfelder. Es gelten*

1. $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ *(*$\operatorname{rot}\operatorname{grad}(f) = \vec{0}$*)*
2. $\nabla^\top (\nabla \times \vec{v}) = 0$ *(*$\operatorname{div}\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$*)*
3. $\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{v})}_{\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{v})} = \underbrace{\nabla(\nabla^\top \vec{v})}_{\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}} - \Delta \vec{v}$

Bemerkung. *Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig. $\vec{v}$ heißt* Potentialfeld*, falls $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ mit $\vec{v} = \nabla f$ existiert. Satz 1, 1. besagt:*

Für ein C^1-Potentialfeld $\vec{v}$ gilt $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$.

30. $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die Ableitung

30.1. Differenzierbarkeit

Es seien $S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in S$ und $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\vec{x}_0 + \vec{h} \in S$. $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^m$ heißt *in x_0 diff'bar mit der Ableitung* $\vec{f}'(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, falls

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{h} + R(\vec{h})$$

mit $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} R(\vec{h})/\|\vec{h}\| = \vec{0}$ erfüllt ist.

30.2.

1. Es folgt sofort: Ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ diff'bar, so ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ stetig.

2. Die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   ist in $(0,0)$ nicht stetig. $(D_{\vec{v}}f)(0,0)$ existiert jedoch für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

30.3. Beispiele

1. $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei eine konstante symmetrische Matrix und $f(\vec{x}) = \vec{x}^\top A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $\vec{f}'(\vec{x}) = 2\vec{x}^\top A,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. A sei eine konstante (m,n)-Matrix und $\vec{f}(\vec{x}) := A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $\vec{f}'(\vec{x}) = A,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

30.4. Ableitung und Richtungsableitung

Satz 1. *Es sei* $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *in* $\vec{x}_0 \in S$ *(offene Menge) diff'bar. Dann existiert* $(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}_0)$ *für jedes* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *und es gilt*

$$\vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{v} = (D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}_0).$$

30.5. Folgerungen

1. Es sei $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in S diff'bar. Dann gilt

$$\vec{f}'(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{x}),\ \ \vec{x} \in S. \tag{*}$$

Und weiter: Ist $J_{\vec{f}}(\vec{x})$ in $\vec{x}$ stetig, so ist $\vec{f}$ in $\vec{x}$ diff'bar. Es gilt (*). (stetig diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ diff'bar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ partiell diff'bar; stetig partiell diff'bar $\Rightarrow$ diff'bar)

2. Ist $\vec{f}$ in S diff'bar, so gilt für $\vec{x} \in S$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$:

$$(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x})\vec{v} = ((\vec{v}^\top\nabla)\vec{f})(\vec{x})$$

Im Fall $m = 1$ kann dies so geschrieben werden:

$$(D_{\vec{v}}f)(\vec{x}) = \vec{v}^\top(\nabla f)(\vec{x}) = f'(\vec{x})\vec{v}$$

Satz 2. *Es sei* $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diff'bar und* $\vec{x} \in S$. *Dann gelten:*

$$\begin{aligned} \max\{D_{\vec{v}}f(\vec{x}) \mid \|\vec{v}\| = 1\} &= \|\nabla f(\vec{x})\| = D_{\vec{w}}f(\vec{x}) \ \textit{und} \\ \min\{D_{\vec{v}}f(\vec{x}) \mid \|\vec{v}\| = 1\} &= -\|\nabla f(\vec{x})\| = D_{\vec{u}}f(\vec{x}) \end{aligned}$$

mit $\vec{w} = \nabla f(\vec{x})/\|\nabla f(\vec{x})\| = -\vec{u}$.

30.6. Die Kettenregel

Satz 3. *Es sind* $\vec{g} : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *und* $\vec{f} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *gegeben. Es sei* $\vec{g}(U) \subset V$. $\vec{g}$ *sei in* $\vec{x} \in U$ *und* $\vec{f}$ *in* $\vec{g}(\vec{x})(\in V)$ *diff'bar. Dann ist* $\vec{f} \circ \vec{g}$ *mit* $\vec{x}$ *diff'bar und es gilt*

$$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))\vec{g}'(\vec{x})\ \ (J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))J_{\vec{g}}(\vec{x}))$$

30.7. Tangentialebene einer Fläche in $\mathbb{R}^3$

Satz 4. *Ist F implizit durch $f(x,y,z) = c$ (const) gegeben, wobei $f \in C^1$ und $\nabla f \neq \vec{0}$ erfüllt seien, so ist*

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla f(\vec{r}_0) = 0$$

eine Gleichung der Tangentialebene an F in $P \in F$, wobei $\vec{r}_0$ der Ortsvektor von P ist.

Übung. *Spezialisieren Sie diese Tangentialebenengleichung auf den Fall einer expliziten Flächengleichung: $z = g(x,y),\ y = h(x,z),\ x = j(y,z)$.*

Satz 5. *Es sei F in Parameterform gegeben: $\vec{r} = \vec{f}(u,v)$ mit $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f \in C^1$ und $D_1\vec{f}(u,v) \times D_2\vec{f}(u,v) \neq \vec{0},\ (u,v) \in U$. Eine Gleichung für die Tangentialebene an F in $P : \vec{r}_0 = \vec{f}(u_0,v_0)$ ist*

$$\vec{r} = \vec{t}(\mu,\sigma) = \vec{r}_0 + \mu D_1\vec{f}(u_0,v_0) + \sigma D_2\vec{f}(u_0,v_0), \quad \mu,\sigma \in \mathbb{R}.$$

31. Zum Taylorsatz für Funktionen in n Variablen

31.1. Vorbereitungen, Bezeichnungen

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, p(\vec{x}) := (x_1 + \ldots + x_n)^j$ $(j \in \mathbb{N})$.

1. $p(\vec{x}) = \sum_{l_1=1}^{n} \ldots \sum_{l_j=1}^{n} x_{l_1} \ldots x_{l_j}$

2. $D_1^{k_1} \ldots D_n^{k_n} p(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = \begin{cases} j!, & k_1 + \ldots + k_n = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $(k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

3. $p(\vec{x}) = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_n=j \\ j_1,\ldots,j_n \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} c_{j_1\ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$. Es gilt $c_{j_1\ldots j_n} = \frac{D_1^{j_1}\ldots D_n^{j_n} p(\vec{x})}{j_1!\ldots j_n!}\Big|_{\vec{x}=\vec{0}}$ (wobei $j_1 + \ldots + j_n = j$ ist.)

Es folgt mit 2.:

Satz 1.

$$p(\vec{x}) = (x_1 + \ldots + x_n)^j = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n \\ j_1+\ldots+j_n=j}} \frac{j!}{j_1! \ldots j_n!} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$$

Übung. *1. Man finde in Satz 1 für $n = 2$ den binomischen Satz aus HMI wieder:* $(x_1 + x_2)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x_1^k x_2^{j-k}$

2. Schreiben Sie explizit $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ auf in der Form wie oben unter 1. und wie in Satz 1.

31.2. Der Taylorsatz aus HMI

Aus HMI, 14. Kapitel, benötigen wir die folgende Variante des Taylorsatzes:

Für $F \in C^{k+1}(I), I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $0, 1 \in I$ gilt:

$$F(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} F^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\theta) \text{ mit } \theta \in (0,1) \tag{E}$$

31.3. Taylorsatz von Funktionen in n Variablen

Wir setzen voraus:

(V) Es sei $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus $C^{k+1}(S)$. S offene Menge und zusammenhängend (= je zwei Punkte aus S können durch einen in S verlaufenden Streckenzug verbunden werden). Mit $\vec{x}$ und $\vec{x}_0 \in S$ gelte $\{\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0),\ 0 \le t \le 1\} \subset S$.

Mit f wird $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $F = f \circ \vec{r}$ definiert. Es gelten $F(1) = f(\vec{x}),\ F(0) = f(\vec{x}_0)$ und (Kettenregel)

$$F^{(j)}(0) = ((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^j f(\vec{x}_0),$$

wobei $((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^j$ mit Satz 1 so ausgewertet werden kann: (setze $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)^\top = \vec{x} - \vec{x}_0$ zur Abkürzung)

$$(\vec{h} \circ \nabla)^j = \sum_{j_1 + \ldots + j_n} \frac{j!}{j_1! \ldots j_n!} h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n} D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n}$$

Wird (E) (31.2 oben) unter den Vor. (V) für $F = f \circ \vec{r}$ hingeschrieben, so ergibt sich

Satz 2 (Taylorsatz)**.**

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} ((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^j f(\vec{x}_0)}_{=T_k(f,\vec{x}_0)(\vec{x})} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} ((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^{k+1} f(\vec{x}_0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}_0))}_{=R_{k+1}} \tag{T}$$

Einschub (Landau Symbol „klein o“)

Es seien f, g für $0 < |x - x_0| < r$ definiert mit $g(x) \neq 0$ für $0 < |x - x_0| < r$:

Definition.

$$f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0 \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Beispiele.

- $|R_{k+1}| = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^k),\ \vec{x} \to \vec{x}_0$
- $\sin x - x = o(|x|^2),\ x \to 0$
- $e^x - 1 = o(1),\ x \to 0$

31.4. Folgerungen, Spezialisierungen

1. (T) für $k = 0$ lautet:
$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{MWS}$$
mit $\vec{\xi} = x_0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}_0),\ \theta \in (0, 1)$.
Satz 3. *Es sei $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Es gilt*
$$f(\vec{x}) = const,\ \vec{x} \in S \Leftrightarrow \nabla f(\vec{x}) = \vec{0},\ \vec{x} \in S.$$
Beispiel. $\arctan(x/y) + \arctan(y/x) = \pi/2,\ x > 0, y > 0.$

2. $$\begin{aligned} T_0(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) \\ T_1(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) \\ T_2(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) &= T_1(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) + \frac{1}{2}((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) \end{aligned} \tag{*}$$
(Beachte: Die rechte Seite von (*) sind für $n = 2$ die Punkte der Tangentialebene der Fläche $x_3 = f(x_1, x_2)$ in $(x_1^0, x_2^0, f(\vec{x}_0))$; für $n = 1$ die Punkte der Tangente an die Kurve $x_2 = f(x_1)$ in $(x_1^0, f(x_1^0))$)

Mit der symmetrischen Matrix
$$H_f(\vec{x}_0) = (D_j D_k f(\vec{x}_0))_{j,k=1,\ldots,n}$$
(die *Hessematrix* von f in $\vec{x}_0$) hat man:
$$((\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = (\vec{x} - \vec{x}_0)^\top H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$
und also
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^\top H_f(\vec{x})(\vec{x} - \vec{x}_0) + R_3 \text{ mit}$$
mit $R_3 = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2)$ für $\vec{x} \to \vec{x}_0$. Oder auch:
$$f(\vec{x}_0 + \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^\top H_f(\vec{x}_0)\vec{x} + o(\|\vec{x}\|^2),\ \vec{x} \to \vec{0}$$

31.5. Taylorreihe

1. Soll eine Funktion $f = f(\vec{x})$ um $\vec{x}_0$ bis zur Ordnung k entwickelt werden, so ist (T) aus Satz 2 verlangt.
   Beispiel. *Entwickle* $f(x,y) = (x-1)^4(y-2)^3$ *um* $(0,0)$ *bis zur Ordnung 2.*

2. Gilt $f \in C^\infty(S)$ und $R_k \to 0$ $(k \to \infty)$ für $\vec{x} \in S$, so erhält man $f(\vec{x})$ in Form einer mehrdimensionalen Potenzreihe (der Taylorreihe) (vgl. 31.1)

$$T(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1\ldots j_n}(x_1 - x_1^0)^{j_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{j_n}$$

   mit $c_{j_1} \ldots c_{j_n} = \frac{1}{j_1! \ldots j_n!} D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} f(\vec{x}_0)$.

   Ist $f(\vec{x})$ um $\vec{x}_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar, so ist diese Reihe die Taylorreihe.
   Beispiele. *a) Entwickle* $f(x,y) = e^{x+y} + \sin(xy)$ *um* $(0,0)$ *in eine Potenzreihe.*

   b) Entwickle $f(x,y) = x^2 - y^2$ *um* $(0,0)$ *und um* $(1,2)$.

   Antwort: $f(x,y) = x^2 - y^2$ *(um* $(0,0)$*)*, $f(x,y) = -3 + 2(x-1) - 4(y-2) + (x-1)^2 - (y-2)^2$ *(um* $(1,2)$*).*

32. $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Extremwerte

32.1. Bezeichnungen, Definitionen, Notwendige Bedingungen

Es sei $\vec{x}_0 \in S$. Gibt es ein $r > 0$ so, dass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ $(\geq)$ gilt für alle $\vec{x} \in S$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$, so liegt bei $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ein *lokales Maximum* (*lokales Minimum*) von f.

Gilt $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ $(>)$ für $\vec{x} \in S$ mit $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$, so heißt der Extremwert *eigentlich* oder *isoliert*.

Beispiel. *Betrachte* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *für* $x^2 + y^2 < 1$.

Satz 1. *Es sei* $S \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge und* $\vec{x}_0 \in S$. *Es sei* $f : S \to \mathbb{R}$ *in* $\vec{x}_0$ *diff'bar. Besitzt* f *in* $\vec{x}_0$ *ein lokales Extremum, so gilt* $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Definition. *Ein Punkt* $\vec{x}_0 \in S$ *mit* $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ *heißt* stationärer (kritischer) *Punkt von* f.

Definition. $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$, $\vec{x}_0 \in S$, *heißt* Sattelpunkt *von* f, *falls* $\vec{x}_0$ *stationärer Punkt von* f *ist und falls in jeder Umgebung von* $\vec{x}_0$ *Punkte* $\vec{u}, \vec{v} \in S$ *liegen mit* $f(\vec{u}) < f(\vec{x}_0) < f(\vec{v})$.

Beispiel. *Für* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *liegt bei* $(0, 0)$ *ein Sattelpunkt*

32.2. Hinreichende Bedinung

Satz 2. *Es sei* $\vec{x}_0 \in S$ *ein stationärer Punkt von* $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Es sei* $f \in C^2(S)$. *Es gelten:*

1. *Ist* $H_f(\vec{x}_0)$ *(siehe 31.4) positiv definit, so liegt bei* $\vec{x}_0$ *ein eigentliches lokales Minimum.*

   Ist $H_f(\vec{x}_0)$ *negativ definit, so ist* $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ *ein eigentlich lokales Maximum.*

2. *Ist* $H_f(\vec{x}_0)$ *indefinit, so ist* $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ *ein Sattelpunkt.*

3. *Ist* $H_f(\vec{x}_0)$ *semidefinit, so ist keine allgemeine Aussage über den Charakter von* $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ *möglich.*

Für $n = 2$ mit $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in S \subset \mathbb{R}^2$ und

$$\Delta(x_0, y_0) := \det(H_f(x_0, y_0)) = (D_1^2 f D_2^2 f - (D_1 D_2 f)^2)(x_0, y_0)$$

lautet der Satz so: (vgl. Kap 25, Satz 2)

1. Aus $\Delta(x_0, y_0) > 0$
   - und $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ folgt: bei (x_0, y_0) liegt ein eigentliches lokales Minimum
   - und $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$ folgt: bei (x_0, y_0) liegt ein eigentliches lokales Maximum
2. Aus $\Delta(x_0, y_0) < 0$ folgt: bei (x_0, y_0) liegt ein Sattelpunkt
3. Im Fall $\Delta(x_0, y_0) = 0$ ist keine allgemeine verbindliche Aussage möglich.

33. Der Satz über die inverse Funktion. Der Satz über implizite Funktionen

33.1. Der Inverse-Funktion-Satz

Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{x}_0 \in S$, so nennen wir

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in S \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

eine offene Umgebung von $\vec{x}_0$ in S (vgl 26.1)

Satz 1 (Inverse-Funktion-Satz)**.** *$\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \mapsto \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ sei aus $C^1(S)$ und S eine offene Menge. Es sei $\vec{x}_0 \in S$ und $\vec{f}'(\vec{x}_0) = J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$ sei regulär. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset S$ von $\vec{x}_0$ derart, dass gelten:*

1. *$\vec{f}(U) =: V$ ist eine offene Menge*
2. *$\vec{f}|_U$ ist bijektiv*
3. *$\vec{f}^{-1} : V \to U$ ist stetig diff'bar. Es gilt*

$$(\vec{f}^{-1})'(\vec{y}) = (\vec{f}'(\vec{f}^{-1}(\vec{y})))^{-1},\ \vec{y} \in V$$

Übung. *Finden Sie für $n = 1$ das entsprechende HMI-Ergebnis hierin wieder.*

Beispiele. *1. $\vec{f} : S = \{(r, \phi) \mid r > 0,\ 0 < \phi < \pi\} \to \mathbb{R}^2$*

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\vec{f}'(r, \phi)$ ist (wegen $\det J_{\vec{f}}(r, \phi) = r$) regulär für alle $(r, \phi) \in S$: (*) ist in einer Umgebung jedes Punktes $(r, \phi) \in S$ stetig diff'bar nach r, ϕ auf lösbar. Hier gilt sogar globale Injektivität: Aus $(r_1, \phi_1) \neq (r_2, \phi_2)$; $(r_1, \phi_2), (r_2, \phi_2) \in S$ folgt: $\vec{f}(r_1, \phi_1) \neq \vec{f}(r_2, \phi_2)$.

2. $\vec{f}$ wie unter 1. jetzt mit $S = \{(r, \phi) \mid r > 0,\ 0 < \phi < 4\pi\}$. $\vec{f}$ ist, wie in Satz 1 formuliert, wegen $\det J_{\vec{f}} = r \neq 0$ in der Umgebung jedes Punktes $(r, \phi) \in S$ injektiv (lokal injektiv). Hier ist S „zu groß“: $\vec{f}$ ist nicht global injektiv: $\vec{f}(r, \pi/4) = \vec{f}(r, 9\pi/4)$.

3. *(zur Übung) Betrachte mit* $S = \mathbb{R}^2$ $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$*. Untersuche mit Satz 1, ob das Gleichungssystem* $\binom{y_1}{y_2} = \vec{f}(x_1, x_2)$ *nach* x_1 *und* x_2 *auflösbar ist.*

33.2. Der Implizite-Funktion-Satz

Gegeben ist

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Gefragt ist nach der Auflösbarkeit von $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ nach $\vec{y}$. Falls das möglich ist durch $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ mit $\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$, sagen wir, $\vec{h}$ *wird durch* $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ *implizit definiert.*

Zur Formulierung des nächsten Satzes führen wir die folgende Bezeichnung ein: $\vec{f}'(\vec{x}, \vec{y})$ ist die folgende $(m, n+m)$-Matrix:

$$\begin{aligned} J_{\vec{f}}(\vec{x}, \vec{y}) &= [D_1\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}), \dots, D_n\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}), D_{n+1}\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}), \dots, D_{n+m}\vec{f}(\vec{x}, \vec{y})] \\ &=: [\, \underbrace{\partial_X \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})}_{(m,n)\text{-Matrix}}, \ \underbrace{\partial_Y \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})}_{(m,m)\text{-Matrix}} \,] \end{aligned}$$

Satz 2 (Implizite-Funktion-Satz)**.** *Es seien* $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *eine offene Menge,* $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *und* $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^m$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})$*, eine* $C^1(S)$*-Funktion. Es seien erfüllt:*

1. $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$

2. $\partial_Y \vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ *ist reguläre Matrix*

Dann hat man:

a) *Es gibt eine offene Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* $\vec{x}_0$ *und eine offene Umgebung* $V \subset \mathbb{R}^m$ *von* $\vec{y}_0$ *und eine* C^1*-Funktion* $\vec{h} : U \to V$, $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$*, mit* $\vec{y}_0 = \vec{h}(\vec{x}_0)$ *und* $\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$, $\vec{x} \in U$.

b) *Für* $\vec{x} \in U$ *gilt:*

$$\vec{h}'(\vec{x}) = -\Big(((\partial_Y \vec{f})(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))\Big)^{-1} (\partial_X \vec{f})(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$$

Beispiel. $m = 2$, $n = 3$. *Wende Satz 2 an auf* $\vec{f}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + y_2x_1 - 4x_2 + 3 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \binom{0}{0}$ *mit* $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = (3, 2, 7, 0, 1)$.

34. Extremwerte mit Nebenbedingungen, Lagrange Multiplikatoren

34.1. Hinführende Beispiele

Beispiel (1)**.** *Gegeben ist die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Gesucht sind auf F die Punkte, die vom Koordinatenursprung minimalen Abstand haben.*

Ist $g(x, y, z) = 0$ eine Gleichung für F, so ist das Minimum von $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ gesucht.

Geometrische Überlegungen führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}) &= \lambda \nabla g(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

für $\vec{x}$. (λ ist eine Hilfsgröße)

Beispiel (2)**.** *Es sind Extremwerte von $f = f(x, y, z)$ gesucht unter den Nebenbedingungen $g_1(x, y, z) = 0,\ g_2(x, y, z) = 0$.*

Geometrische Überlegungen führen auf die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= g_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Das sind fünf skalare Gleichungen für $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$, die an einer Extremalstelle erfüllt sind.

34.2. Prolemstellung, abstrakte Voraussetzungen

Es sind mit einer offenen Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ gegeben:

$$f : S \to \mathbb{R} \text{ und } \vec{g} : S \to \mathbb{R}^m,\ \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

mit: $m < n,\ f, \vec{g} \in C^1$.

(Beispiel 1: $n = 3,\ m = 1$, Beispiel 2: $n = 3, m = 2$)

Gesucht sind Extremalstellen der Funktion $f|_M$, wobei $M := \{\vec{x} \in S \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ ist.

34.3. Lagrange Multiplikatoren Satz

$f, \vec{g}, m, n, M$ seien wie unter 34.2. Es sei erfüllt:

$$\operatorname{rang}(\vec{g}'(\vec{x})) = m, \quad \vec{x} \in S.$$

Dann gilt: Ist $\vec{x}_0 \in M$ eine Extremalstelle von f, so gibt es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}_0).$$

($\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}_0)$ zusammen mit $\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ sind $n + m$ skalare Gleichungen für die $n + m$ Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und $\vec{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^\top$.)

Beispiel (3)**.** *Gesucht sind die Extremwerte von $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ unter den NB:*

$$(g_1(x, y, z) =)\ z = 0$$
$$(g_2(x, y, z) =)\ z^2 - (y - 1)^3 = 0$$

Beispiel (4)**.** *Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine symmetrische Matrix. Gesucht sind die Extremwerte von $f(\vec{x}) = \vec{x}^\top A\vec{x}$ unter der Nebenbedingung $\|\vec{x}\| = 1$.*

Beispiel (5)**.** *Gesucht sind die Punkte des Kreises $x^2+y^2 = 1$ und der Gerade $x+y = 4$, die voneinander minimalen Abstand haben.*

35. Integration über zweidimensionale Bereiche

35.1. Gebiet und Rand eines Gebietes (vgl. 26.1, 29.1, 31.3)

Ein *Gebiet* $G \subset \mathbb{R}^n$ ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge. ∂G bezeichnet *den Rand von* G, der so definiert ist:

$$\vec{x}_0 \in \partial G \Leftrightarrow \text{ für jedes } r > 0 \text{ gelten } B(\vec{x}_0, r) \cap G \neq \emptyset \text{ und } B(\vec{x}_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset$$

Mit $\overline{G} := G \cup \partial G$ wird der *Abschluss von* G bezeichnet.

Beispiel. $R = (0,5) \times (0,5) = \{(x,y) \mid 0 < x < 5,\ 0 < y < 5\}$ *ist ein Gebiet im* $\mathbb{R}^2$. *Hier ist*

$$\partial R = \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 5\} \cup \{(5,y) \mid 0 \leq y \leq 5\} \cup \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 5\} \cup \{(x,5) \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

und $\overline{R} = [0,5] \times [0,5]$

35.2. Integral über spezielle Gebiete

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit einer stückweise glatten Randkurve. Es ist $f \in C^0(\overline{G})$ gegeben.

G ist *vom Typ* $G^{(x)}$, falls $G = \{(x,y) \mid a(y) < x < b(y),\ c < y < d\}$ mit $a, b \in C^0([c,d])$.

G ist *vom Typ* $G^{(y)}$, falls $G = \{(x,y) \mid c(x) < y < b(x),\ a < x < b\}$ mit $c, d \in C^0([a,b])$.

Definition.

$$\begin{aligned}\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &:= \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \qquad (\text{für } G \text{ vom Typ } G^{(x)}) \\ &:= \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c(x)}^{d(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad (\text{für } G \text{ vom Typ } G^{(y)})\end{aligned}$$

Ist G ein Gebiet, das sich disjunkt in Gebiete $G_1, \ldots, G_N$ vom Typ $G^{(x)}$ oder $G^{(y)}$ zerlegen lässt, so wird definiert:

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) := \sum_{j=1}^{N} \iint_{G_j} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Bemerkungen. *1. Falls* $f(x,y) \geq 0,\ (x,y) \in G$ *gilt, so gibt* $\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ das Volumen des Körpers $K = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in G\}$ *an.*

2. $\iint_G \mathrm{d}(x,y)$ *ist* der Flächeninhalt $I(G)$ *von* G.

35.3. Beispiele

1. G sei das beschränkte Gebiet, das von den Kurven $y = 1/x,\ y = x,\ x = 2$ berandet wird: $\iint_G x^2/y^2\,\mathrm{d}(x,y) = 9/4$.

2. Für $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1$, rechnet man nach:

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1/2,$$
$$\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -1/2$$

   Satz 1. *Gilt* $f \in C^0(\underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{=:G})$, *so hat man*

$$\begin{aligned}\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\end{aligned}$$

3. Berechne $I(G)(= 3\pi)$ für $G = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

36. Kurvenintegrale (Linienintegrale)

36.1. Definition Kurvenintegral über ein Skalarfeld

Im Folgenden ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und γ die orientierte Bahn einer stückweise glatten Kurve, die in G verläuft. $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1[a,b]$, $\vec{r}'(t) \neq 0$ für $a \leq t \leq b$, sei eine Parameterdarstellung.

Es sei $f \in C^0(G)$.

Definition.

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Bemerkung. *1. $f = 1$: $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s =$ Länge von $\gamma = L(\vec{r})$ (27.2).*

2. $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung, d.h. ist $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, eine andere Darstellung für γ, so gilt

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\vec{\rho}(\tau)) \|\vec{\rho}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$$

(vgl. 27.3)

3. Bezeichnet $-\gamma$ die entgegengesetzt orientierte Bahn (etwa mit der Darstellung $\rho(\tau) = \vec{r}(a+b-\tau), a \leq \tau \leq b$, wenn $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, γ darstellt), so gilt

$$\int_{-\gamma} f \, \mathrm{d}s = \int_\gamma f \, \mathrm{d}s$$

4. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Bahnen von glatten Kurven mit: der Endpunkt von γ_l ist der Anfangspunkt von γ_{l+1} $(l = 1, 2, \ldots)$, so wird definiert für $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \sum_{l=1}^{\cdots} \int_{\gamma_j} f \, \mathrm{d}s$$

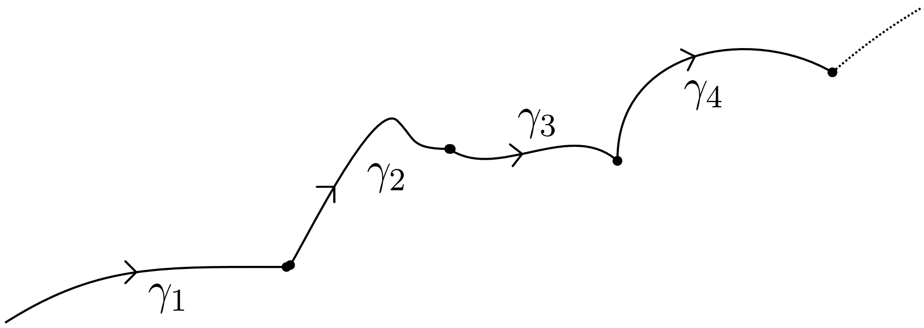

Abbildung 36.1.: Der Weg γ

5. *Ist $\vec{r} : [a, b] \to G$ eine geschlossene Kurve in G mit der Bahn γ, so schreiben wir*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \oint_\gamma f \, \mathrm{d}s = \quad (\text{ bzw. } \oint_\gamma f \, \mathrm{d}s)$$

je nach Orientierung

36.2. Kurvenintegral über ein Vektorfeld

Unter den Gegebenheiten aus 36.1 sei $\vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf G.

Definition.

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, \mathrm{d}t$$

Mit dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t) := \vec{r}'(t)/\|\vec{r}'(t)\|$ und 36.1 kann man das auch so schreiben:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{T}) \, \mathrm{d}s$$

Beispiele. 1. *Ist $\vec{v}$ ein Kraftfeld, so gibt $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ die Arbeit an, die gegen $\vec{v}$ verrichtet werden muss, um einen Massenpunkt auf γ zu bewegen. Ist $\vec{v}$ ein elektrisches Feld, so gibt das Integral eine Potentialdifferenz (Spannung) an (vgl. Beispiel 3. im Anschluss)*

2. *(siehe auch 36.1, Bemerkungen 3.)*

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

3. *Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ ein C^1-Skalarfeld:*

$$\int_\gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

36.3. Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

Satz 1. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, das gleichzeitig vom Typ $G^{(x)}$ und $G^{(y)}$ ist. ∂G sei bezogen auf G positiv orientiert und stückweise glatt. Es seien $\tilde{G}$ ein Gebiet mit $\overline{G} \subset \tilde{G}$ und $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \in C^1(\tilde{G})$ ein Vektorfeld. Dann gilt:*

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_G (D_1 v_2 - D_2 v_1)(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \tag{G}$$

Bemerkungen, Beispiele. 1. *Der Satz (G) gilt für Gebiete vom Typ $G^{(x)}$ und $G^{(y)}$, sowie für Gebiete folgender Form*

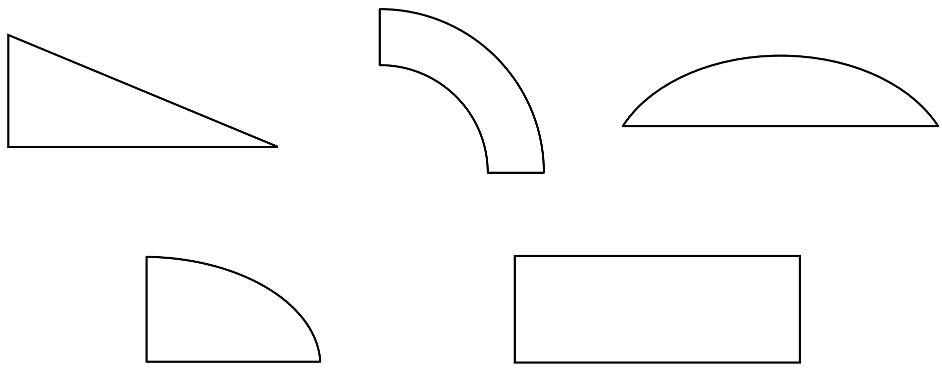

Abbildung 36.2.: Gebiete, für die (G) gilt

und für Gebiete, die sich durch endlich viele Schnitte in derartige Gebiete zerlegen lassen.

2. *Es sei γ durch $r = \phi, 0 \le \phi \le \pi$. Wobei r, ϕ die Polarkoordinaten der (x,y)-Ebene sind. Für*

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ zu berechnen.

Zur Lösung kann eine der folgenden Varianten angewendet werden:

a) *Ergänze γ durch γ_1: $\vec{r}(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $-\pi \le t \le 0$, zu einer geschlossenen Kurve. Wende auf das durch $\gamma + \gamma_1$ berandete Gebiet den Satz an.*

b) Löse mit der Darstellung $\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi\cos\phi \\ \phi\sin\phi \end{pmatrix},\ 0 \le \phi \le \pi$ *für* γ.

c) $\vec{v}$ *ist ein Potentialfeld. Berechne ein Potential und löse.*

3. *Für* $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *und* $\gamma =$ *der positiv einmal durchlaufene Kreis um* $\vec{0}$ *mit Radius 1:* $\oint_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 2\pi$.

37. Folgerungen aus dem Gaußschen Satz, 36.3., aus (G)

37.1. Flächeninhalt von G

Für $\vec{v}(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right)$ liefert (G):

$$2\ I(G)\ (\textit{Flächeninhalt von } G\ )\ = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

37.2. Der Stokessche Satz im $\mathbb{R}^2$

$G, \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ sei wie im Satz 36.3. $\vec{v} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^3$ sei aus $C^1(\tilde{G})$, $\partial G : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\iint_G (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_3 \,\mathrm{d}(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{S}$$

$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ heißt *Zirkulation von* $\vec{v}$ längs ∂G.

37.3. Der Divergenzsatz im $\mathbb{R}^2$

$G, \tilde{G}$ seien wie vorher. $\vec{w} = \vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix} \in C^1(\tilde{G})$.

Es sei $\vec{N}$ auf ∂G der für G äußere Einheitsnormalenvektor (ist $\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ der Tantenteneinheitsvektor, so gilt $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$). Setzt man in (G) $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{smallmatrix}\right)$, so geht (G) über in

$$\iint_G \nabla \cdot \vec{w} \,\mathrm{d}(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}s \tag{D}$$

37.4. Die Greenschen Formeln im $\mathbb{R}^2$

$G, \tilde{G}$, seien wie vorher und $f, g \in C^2(\tilde{G})$ Skalarfelder.

Setzt man in (D) $\vec{w} = g\nabla f$, so geht (D) über in die *1. Greensche Formel*

$$\oint_{\partial G} g D_{\vec{N}} f \, \mathrm{d}s = \iint_G (g\Delta f + \nabla g \cdot \nabla f) \, \mathrm{d}(x, y)$$

Vertauscht man hier f und g und subtrahiert von der 1. Greenschen Formel, so erhält man die *2. Greensche Formel*

$$\oint_{\partial G} (g D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} g) \, \mathrm{d}s \iint_G (g\Delta f - f\Delta g) \, \mathrm{d}(x, y)$$

38. Potentialfelder

38.1. Definition: Potential, Potentialfeld

Definition. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. $\vec{v}$ heißt* Potentialfeld auf G, *falls es ein diff'bares Skalarfeld $f : G \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$ auf G gibt. f heißt* Potential (Stammfunktion) *für $\vec{v}$.*

Satz 3 / 31.4 besagt, dass ein Potential bis auf eine beliebige Konstante eindeutig festliegt.

Satz 1. *(Ist für $n = 3$ die Bemerkung in 29.3) Ist $\vec{v}$ ein $C^1(G)$-Potentialfeld, so gilt*

$$J_{\vec{v}}(\vec{x}) = J_{\vec{v}}^{\top}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G.$$

38.2. Der erste Hauptsatz für Kurvenintegrale

Satz 2 (1. Hauptsatz für Kurvenintegrale / 36.2 Beispiel 3)**.** *$\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ sei ein stetiges Potentialfeld mit einem Potential $f : G \to \mathbb{R}$. Es seien $\vec{r}_0, \vec{r}_1$ die Ortsvektoren zweier Punkte aus G und $\gamma \subset G$ eine stückweise glatte Kurve, die $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindet. Es gilt*

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0).$$

Satz 3. *Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\vec{v}$ ist auf G ein Potentialfeld*
2. *Für je zwei Punkte $\vec{r}_0, \vec{r}_1 \in G$ ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ unabhängig von der $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindenen stückweise glatten Kurve $\gamma \subset G$.*
3. *Für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $\gamma \subset G$ gilt $\oint_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$.*

38.3. Der zweite Hauptsatz

Definition (einfach zusammenhängendes Gebiet)**.** *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt* einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in G stetig auf einen Punkt in G zusammengezogen werden kann, ohne G zu verlassen.*

(für Beispiele und Gegenbeispiele lese man nach bei Meyberg-Vachenauer Band I, Kap.8 oder/ und Burg, Haf, Wille Band IV, Kap. 1.6)

Satz 4 (2. Hauptsatz für Kurvenintegrale)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängedes Gebiet und $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^n$ aus C^1. Es gilt*

$$\vec{v} \textit{ ist Potentialfeld auf } G \Leftrightarrow J_{\vec{v}}(\vec{x}) = J_{\vec{v}}^{\top}(\vec{x}),\ \vec{x} \in G.$$

In Beispiel 3., 36.3 gilt in $G \setminus \{(0,0)\}$ $J_{\vec{v}} = J_{\vec{v}}^{\top}$. $\vec{v}$ ist kein Potentialfeld. $G \setminus \{(0,0)\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Bemerkung. *Ist $\vec{v}$ ein $\mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld, so erhält man durch*

$$f(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{v}(t\vec{x}) \cdot \vec{x}\,\mathrm{d}t$$

ein Potential.

Zur *Übung* untersuche, ob $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xyz-z^2-3y^2 \\ 2x^2z-6xy+1 \\ 2x^2y-2xz-2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ ein Potentialfeld ist. Wenn ja, berechne ein Potential auf zwei Arten.

39. FLächen im $\mathbb{R}^3$, Oberflächeninhalt, Oberflächenintegrale

39.1. (siehe auch 30.7) Flächendarstellungen

$\vec{N}$ bezeichnet für die jeweilige Fläche einen Normaleneinheitsvektor.

- *implizite Darstellung:*

$$F(x,y,z)=0,\ \vec{N}(x,y,z)=\frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}$$

- *explizite Darstellung:*

$$z=f(x,y),\ \vec{N}_{(x,y,f(x,y))}=\frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}\begin{pmatrix}D_1 f(x,y)\\ D_2 f(x,y)\\ -1\end{pmatrix}$$

- *Parameterdarstellung:* $\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ \vec{r}:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ sei aus $C^1(U)$ mit $\operatorname{rang}(\vec{r}'(u,v))=2$. $\vec{r}$ heißt *glattes (reguläres) Flächenstück in* $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben für $\vec{r}(U)$ auch F und sprechen von der Fläche F.

$$\vec{N}(u,v)=\frac{D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)}{\|D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)}\|,\quad (u,v)\in U.$$

Beispiele. *1. Durch* $\vec{r}(\phi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $0\le\phi\le 2\pi, 0<\theta\le\pi/2$ *wird die Oberfläche der Halbkugel* $x^2+y^2+z^2=1,\ z>0$ *beschrieben.*

2. Durch $\vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix}-u+2v\\ 3+u-2v\\ -2v-4+u\end{pmatrix}$ *wird kein Flächenstück, sondern eine Gerade gegeben.*

39.2. Oberflächenintegrale

Gegeben ist F durch $\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in U$. $\vec{r}$ sei glatt.

$f : F \to \mathbb{R}$ und $\vec{w} : F \to \mathbb{R}^3$ sind stetige Skalar-bzw. Vektorfelder. Die *Oberflächenintegrale* über f und $\vec{w}$ sind so definiert:

$$\iint_F f \,\mathrm{d}o := \iint_U f(\vec{r}(u,v)) \|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\| \,\mathrm{d}(u,v)$$
$$\iint_F \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{o} := \iint_U \vec{w}(\vec{r}(u,v)) \cdot (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)) \,\mathrm{d}(u,v)$$

Für $f = 1$ hat man in $\iint_F \mathrm{d}o$ den *Flächeninhalt* von F:

$$I(F) := \iint_F \mathrm{d}o$$

$\mathrm{d}o = \|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\| \,\mathrm{d}(u,v)$ heißt *skalares Oberflächenelement* der Fläche $\vec{r}$.

$\mathrm{d}\vec{o} = (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)) \,\mathrm{d}(u,v)$ ist das *vektorielle Oberflächenelement* von $\vec{r}$.

Es gilt $\mathrm{d}\vec{o} = \vec{N} \,\mathrm{d}o$

Beispiele. *1.* do *für* $z = f(x,y)$*:* $\mathrm{d}o = \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2} \,\mathrm{d}(x,y)$

2. do *für* $\vec{r}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$*:* $\mathrm{d}o = r \,\mathrm{d}(r,\phi)$

3. do *für* $\vec{r}(\phi,\theta) = R \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$*:* $\mathrm{d}o = R^2 \cos\theta \,\mathrm{d}(\phi,\theta)$.

40. Variablensubstitution im Gebietsintegral

40.1. Die Transformationsformel

$$\begin{aligned} \vec{\psi} : U^* \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (\xi, \eta) &\mapsto \vec{\psi}(\xi, \eta) = (u, v), \end{aligned}$$

$\vec{\psi}(U^*) =: U$, heißt *Parametertransformation*, falls $\vec{\psi} \in C^2$, injektiv ist und $\det \vec{\psi}'(\xi, \eta) = D_1\psi_1 D_2\psi_2 - D_1\psi_2 D_2\psi_1 > 0$ erfüllt.

Satz 1 (Variablensubstitution im Gebietsintegral)**.** *Es sei $f \in C^0(U)$ und $\vec{\psi}$ wie oben. Dann hat man*

$$\iint_{U=\psi(U^*)} f(u, v)\, \mathrm{d}(u, v) = \iint_{U^*} (\vec{f} \cdot \vec{\psi})(\xi, \eta) \det \vec{\psi}'(\xi, \eta)\, \mathrm{d}(\xi, \eta)$$

Man liest ab

$$I(U) = \iint_{U^*} \det \vec{\psi}'(\xi, \eta)\, \mathrm{d}(\xi, \eta) \ \left(= \iint_U \mathrm{d}(u, v) \right)$$

Beispiel. $\vec{\psi}(r, \phi) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{smallmatrix}\right)$, $\det \vec{\psi}'(r, \phi) = r$. *Es sei $U = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Dann ist*

$$U^* = \{(r, \phi) \mid 1 < r < 2,\ 0 < \phi < 2\pi\}$$

und $I(U) = \int_{r=1}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r$.

Satz 2 (Invarianz von $\iint_F \mathrm{d}o$)**.** *Es sei $\vec{\psi}$ eine Parametertransformation wie oben. Ein reguläres Flächenstück $\vec{r} : U \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben. Dann gilt für das reguläre Flächenstück $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \vec{\psi} : U^* \to \mathbb{R}^3$ ($\vec{r}(U) = \vec{\rho}(U^*) = F$):*

$$\left(\iint_F \mathrm{d}o = \right) \iint_U \|D_1\vec{r}(u, v) \times D_2\vec{r}(u, v)\|\, \mathrm{d}(u, v) = \iint_{U^*} \|D_1\vec{\rho}(\xi, \eta) \times D_2\vec{\rho}(\xi, \eta)\|\, \mathrm{d}(\xi, \eta).$$

Begründung: Nachrechnen mit Kettenregel und Satz 1.

40.2. Parameterdarstellung von Rotationsflächen

Die glatte Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b$ mit $x(t) > 0$ rotiere um die z-Achse. Die entstehende Drehfläche hat die Darstellung $\vec{r}(t, \theta) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\theta \\ x(t)\sin\theta \\ z(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Beispiele. *1.* Kugel um 0 mit Radius R *erhält man mit* $x(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$, $z(t) = t$, $-R \leq t \leq R$.

2. $0 < b < a$. *Den Torus erhält man mit* $x(t) = a + b\cos t$, $z(t) = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Übung. *Berechne die Kugeloberfläche und die Torusoberfläche.*

41. Der Stokesche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

41.1. Die Voraussetzungen

(V1) Es sei $\vec{r} : U^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück. Es gelten $\vec{r} \in C^2(U^*)$, $\vec{r}$ injektiv. $F^* := \vec{r}(U^*)$.

(V2) $U \subset U^*$ sei ein Gebiet mit einer stückweise glatten geschlossenen positiv orientierten Jordankurve als Rand. $F := \vec{r}(U)$. $\partial F = \vec{r}(\partial U)$ ist dann eine stückweise glatte geschlossene Jordankurve.

(V3) $\vec{f} : F^* \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetig diff'bares Vektorfeld.

41.2. Der Stokessche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

Unter den vorher formulierten Bedingungen (V1), (V2), (V3) gilt

$$\oint_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{T} \,\mathrm{d}s = \oint_{\partial F} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_F (\nabla \times \vec{f}) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \iint_F (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o$$

41.3. Bemerkungen zu $\vec{N}$ und $\vec{T}$ und ihre gegenseitige Abhängigkeit

1. Hat ∂U die Darstellung $\vec{w}(t) = \binom{u(t)}{v(t)}$, $a \le t \le b$, so hat ∂F die Darstellung $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(\vec{w}(t))$, $a \le t \le b$, womit $\vec{T}(t) = \vec{\rho}\,'(t)/\|\vec{\rho}\,'(t)\|$ festliegt.

   $\vec{N}_F$ im Satz hat dann die Richtung von $D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in U^*$.

2. In $P \in \partial F$ wähle in der Tangentialebene an F^* die für F äußere Einheitsnormale $\vec{n}$ auf ∂F. $\vec{N}$ hat dann die Richtung von $\vec{n} \times \vec{T}$.

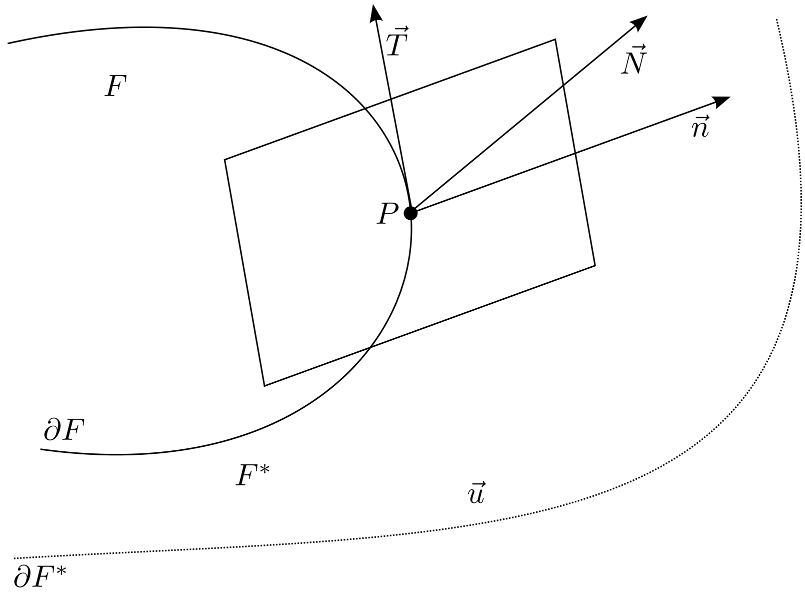

Abbildung 41.1.: Normalenvektor $\vec{N}$

41.4. Beispiel

Mit $h(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^2$, $g(x, y, z) = x + y + z$ und $F = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ ist $J := \iint_F (\nabla h \times \nabla g) \cdot \vec{N}\, do$ zu berechnen, wobei $\vec{N}$ die Einheitsnormale auf F ist, die nichtnegative z-Koordinate besitzt.

42. Volumenintegrale

42.1. Definitionen

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet der folgenden Form

$$G := \{(x,y,z) \mid g(x,y) < z < h(x,y),\ (x,y) \in G_0\}$$

wobei G_0 ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der (x,y)-Ebene mit stückweise glattem Rand ist. g und h sind aus $C^1(G_0)$. (G heißt in z-Richtung projizierbar)

Für $f \in C^0(\overline{G})$ (Skalar- oder Vektorfeld) wird definiert:

$$\iiint_G f \,\mathrm{d}\tau := \iint_{(x,y)\in G_0} \left(\int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}(x,y)$$

Analog für in x-Richtung, bzw. in y-Richtung projizierbare Gebiete (permutiere oben x, y, z entsprechend).

Hat G_0 die Form: $G_0 = \{(x,y) \mid u(x) < y < v(x),\ a < x < b\}$ mit $u, v \in C^1[a,b]$, so wird

$$\iiint_G f\,\mathrm{d}\tau = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=u(x)}^{v(x)} \left(\int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad (1)$$

$$\left(= \iiint_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \right).$$

Gebiete G, die nicht zu einem dieser projezierbaren Bereiche gehören, werden (sofern möglich) in derartige Gebiete zerlegt. Die einzelnen Integrale werden dann zu $\iiint_G$ aufsummiert.

Beispiele. *1. $I(G)$(= Volumen von G)= $\iiint_G 1\,\mathrm{d}\tau$.*

Beispiel. *Ist P die Pyramide mit den Eckpunkten* $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$, *so erhält man*

$$I(P) = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\int_{z=0} 1 - x - y\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

2. G habe die Form wie für (1) verlangt. Es sei $x_0 \in (a,b)$ beliebig.

$$\alpha(x_0) := \int_{y=u(x_0)}^{v(x_0)} \left(\int_{z=g(x_0,y)}^{h(x_0,y)} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y$$

gibt den Flächeninhalt von $G \cap \{x = x_0\}$ an. Es gilt somit (vgl. mit (1)):

$$I(G) = \int_{x=a}^{b} \alpha(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Satz von Cavalieri)}$$

a) Im Beispiel der Pyramide ist $\alpha(x) = (1-x)^2/2$.

b) Rotiert $\{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\},\ f \in C^0[a,b]\}$ um die x-Achse, so entsteht der Rotationskörper G_{rot}. *Hierbei ist $\alpha(x) = \pi f(x)^2$, also $I(G_{\text{rot}}) = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$.*

Beispiele (hierzu)**.**

- *Volumen von $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$. Mit $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, erhält man $I = 4/3\pi R^3$.*
- Torusvolumen*: Rotation von $\{(x,y) \mid x^2 + (y-b)^2 \le a^2\}$ um die x-Achse ($0 < a < b$), so folgt mit $f_{1/2} = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$*

$$I(\mathit{Torus}) = \pi \int_{-a}^{a} (f_1^2(x) - f_2^2(x))\,\mathrm{d}x = 2\pi^2 a^2 b$$

3. Berechne $J = \iiint_K z\,\mathrm{d}(x,y,z)$ für $K = \{(x,y,z) \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1, z \ge 0\}$ ($a,b,c > 0$ konst)

43. Substitution im Volumenintegral

43.1. Erinnerung an $n = 1$, $n = 2$

$n = 1$: HMI Substitutionsregel für Integrale

$n = 2$: Satz 1 40. Kapitel

43.2. Substitutionsregel für $n = 3$

G, G^* sind beschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^3$. Es sei $f \in C^0(G)$ und beschränkt. $\vec{\psi} : G^* \to G$, $\vec{\psi}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ sei C^1, injektiv mit $\det \vec{\psi}'(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$ für $(\xi, \eta, \zeta) \in G^*$. Es gilt:

$$\iiint_{G=\vec{\psi}(G^*)} f(u, v, w)\, \mathrm{d}(u, v, w) = \iiint_{G^*} ((f \circ \vec{\psi})(\xi, \eta, \zeta))|\det \vec{\psi}'(\xi, \eta, \zeta)|\, \mathrm{d}(\xi, \eta, \zeta)$$

43.3. Beispiele

Wir setzen zur Abkürzung $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathrm{d}\vec{u} = \mathrm{d}(u, v, w), \ldots$

1. Es sei A eine reguläre konstante $(3, 3)$-Matrix.

$$\vec{u} = \vec{\psi}(\vec{\xi}) = A\vec{\xi} + \vec{b}$$

($\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, konst) mit $\vec{\psi}'(\vec{\xi}) = A$ gibt der Satz 43.2

$$\iiint_{\vec{\psi}(G^*)} f(\vec{u})\, \mathrm{d}\vec{u} = \iiint_{G^*} f(A\vec{\xi} + \vec{b})|\det A|\, \mathrm{d}\vec{\xi}$$

Für $f = 1$ besagt dies: $I(G) = I(\psi(G^*)) = |\det(A)|I(G^*)$. Ist $\vec{\psi}$ eine Bewegung ($|\det A| = 1$), so heißt das: Das Volumen eines Körpers ist bewegungsinvariant.

2. *Integration rotationssysmmetrischer Funktionen* $0 < r_1 < r_2$: $f : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ sei stetig. $\|\vec{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Es gilt

$$\iiint_{r_1 \leq \|\vec{x}\| \leq r_2} f(\|\vec{x}\|)\,\mathrm{d}\vec{x} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(r)\,\mathrm{d}r$$

44. Der Gaußsche Integralsatz in $\mathbb{R}^3$

44.1. Der Gaußsche Satz

Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, das sich durch endlich viele Schnitte in Bereiche zerlegen lässt, die gleichzeitig in x-, y-, z-Richtung projizierbar sind. Die Oberfläche ∂G von G bestehe aus endlich vielen geschlossenen stückweise glatten Flächen. $\vec{N}$ bezeichne den Normalenvektore der Länge Eins auf ∂G, der ins äußere von G weist. $\vec{v}$ sei ein in einer Umgebung von G definiertes C^1-Vektorfeld. Es gilt:

$$\iiint_G \nabla \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{\iint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}o}_{\substack{\text{Fluss von } \vec{v} \text{ durch} \\ \partial G \text{ nach Außen}}} \tag{1}$$

44.2. Beispiele

1. Genau wie in 37.4 erhält man mit Skalarfeldern $f, g \in C^2(\overline{G})$ aus (1) mit $\vec{v} = g\nabla f$ die *Greenschen Formeln*
$$\iint_{\partial G} g D_{\vec{N}} f\,\mathrm{d}o = \iiint_G (g\Delta f + \nabla g \cdot \nabla f)\,\mathrm{d}\tau,$$
$$\iint_{\partial G} (g D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} g) do = \iiint_G (g\Delta f - f\Delta g)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. Für $\vec{v} \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ gilt wegen $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$ und (1)
$$\iint_{\partial G} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = 0$$
Übung. *Versuche, dies Ergebnis mittels des Stokesschein Satzes zu begründen. Warum ist dies dann ein besseres Ergebnis?*

3. Setzt man in (1) $\vec{v} = \vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, so folgt wegen $\nabla \cdot \vec{v} = 3$
$$I(G)\ (\,= \text{Volumen von } G)\ = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}o$$

Ist speziell $G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| < R\}$ und rechnet man mit Kugelkoordinaten, so folgt leicht $I(G) = 4/3\pi R^3$.

4. Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, auf das der Satz 44.1 anwendbar ist, und es gelte $\vec{0} \notin \partial G$. Dann gilt

$$\iint_{\partial G} \frac{\vec{x} \cdot \vec{N}}{\|\vec{x}\|^3} \,\mathrm{d}o = \begin{cases} 4\pi, & \text{falls } \vec{0} \in G \\ 0, & \text{falls } \vec{0} \notin G. \end{cases}$$

Man benötigt (siehe auch 29.2) $\nabla \cdot \vec{x}/\|\vec{x}\|^3 = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$. Gilt $\vec{0} \in G$, so wird (1) mit $\vec{v} = \vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ angewendet mit $G \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ anstelle von G, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset G$ gilt. (Warum ist das möglich?)

Teil II.

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Differenzieren im Komplexen, Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen (CR-DGLn)

1.1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

Wir werden häufig den $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren, d.h. ausnutzen, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ z &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Re}\,(z) \\ \mathrm{Im}\,(z) \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

eine bijektive (lineare) Abbildung ist.

Wir schreiben z.B. wahlweise G ist Gebiet in $\mathbb{R}^2$ oder in $\mathbb{C}$.

Beispiel. *Mittels dieser Zuordnung wird dem Produkt der komplexen Zahlen $\xi = a + ib, z = x + iy$ $(a, b, x, y \in \mathbb{R})$ das Element $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet.*

1.2. $f : G \to \mathbb{C}$ und $\vec{f} : G \to \mathbb{R}^2$

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ eine Funktion. Setze

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &:= \mathrm{Re}\,(f(x+iy)), \\ v(x,y) &:= \mathrm{Im}\,(f(x+iy)) \end{aligned}\right. \quad ((x,y) \in G)$$

Wir ordnen f das Vektorfeld $\vec{f} : G \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in G$$

zu.

Beispiele. *1. $f(z) = e^z \to \vec{f}(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{smallmatrix}\right)$*

2. $f(z)=z^2 \to \vec{f}(x,y)=\binom{x^2-y^2}{2xy}$

3. $f(z)=\sin(z) \to \vec{f}(x,y)=\binom{\sin x\cosh y}{\cos x \sinh y}$

1.3. Holomorphie, Die CR-DGLn

Die komplexe Funktion $f: G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ heißt *in $z_0\in G$ diff'bar*, falls

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert durch $f'(z_0)$ bezeichnet und *die erste Ableitung von f in z_0 genannt.*

Bemerkungen. 1. *Ist f in z_0 diff'bar, so ist f in z_0 stetig.*

2. *Die aus dem Reellen bekannten Regeln wie z.B.:* Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Differenzieren von Potenzreihen*: gelten wörtlich hier in diesem allgemeineren Rahmen.*

3. **Definition.** *f heißt* in $z_0\in G$ holomorph*, falls f in einer Umgebung von z_0 diff'bar ist. f heißt* holomorph in G*, falls f in jedem Punkt $z\in G$ holomorph ist.*

Setzt man die (reelle) Diff'barkeit von $f(x+iy)$ als Funktion von x und y in Beziehung zur Diff'barkeit von $f(z)$, so erhält man:

Satz 1. *Es seien $G\subset\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$) ein Gebiet und $u,v: G\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Definiert man $w=f(z)$, $z\in G$ durch $u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$, (also $f=u+iv$), so gilt:*

$f: G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist in G holomorph

$\Leftrightarrow$

u,v sind in G diff'bar, und es sind die Cauchy-Riemann DGLn

$$\begin{matrix} D_1u(x,y)=D_2v(x,y) \\ D_2u(x,y)=-D_1v(x,y)\end{matrix}\quad (x,y)\in G$$

erfüllt

Dann gilt $f'(x+iy)=(D_1u)(x,y)+i(D_1v)(x,y)$.

1.4. Folgerungen

1. $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei in G holomorph. Mit $\vec{f} = \binom{u}{v}$ (siehe oben 1.2) gilt

$$\det \vec{f}'(x,y) = |f'(x+iy)|^2, \quad (x,y) \in G.$$

2. Ist $f = u + iv$ im Gebiet G holomorph, so gilt $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$. (Die Kurvenscharen $u(x,y) =$ konst und $v(x,y) =$ konst sind zueinander orthogonale Scharen)

3. *Holomorphe Funktionen und harmonische Funktionen:* $u \in C^2(G)$ mit $\Delta u(x,y) = D_1^2 u(x,y) + D_2^2 u(x,y) = 0,\ (x,y) \in G$, heißt *harmonisch in* G.

   Wir verwenden im Vorgriff auf noch zu Begründendes, dass gilt: Ist f in G holomorph, so ist auch f' in G holomorph. Daraus folgt: $u = \mathrm{Re}\,(f),\ v = \mathrm{Im}\,(f)$ sind auch $C^\infty(G)$.
   Satz 2. *Ist $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $u = \mathrm{Re}\,(f)$ und $v = \mathrm{Im}\,(f)$ in G holomorph, so sind u und v in G harmonisch.*
   Satz 3. *(vgl. Satz 4 / Kap. 38) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und u eine in G harmonische Funktion. Dann gibt es eine Funktion $v : G \to \mathbb{R}$ derart, dass $f = u + iv$ in G holomorph ist. (eine solche Funktion v ist harmonisch (Satz 2): sie heißt auch zu u* konjugiert harmonisch*).*
   Beispiel. $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$. $f(z) = z^2 + iz + i\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *mit* $v(x,y) = 2xy + x + \alpha$.

2. Schlichte Funktionen. Der komplexe Logarithmus. Wurzeln

2.1. Schlichtheit

$f : G \to \mathbb{C},\ w = f(z)$ heißt *schlicht auf* G, falls f auf G holomorph und injektiv ist.

Beispiele. *1.* $w = f(z) = z^2$ *ist auf* $G_1 = \{z \mid 0 < \arg(z) < 3\pi/2\}$ nicht schlicht, *da für* $z_1 = e^{i\pi/4}$ *und* $z_2 = e^{i5\pi/4}$ *gelten:* $z_1, z_2 \in G, z_1 \neq z_2$ *und* $z_1^2 = z_2^2 (= i)$.

2. $w = f(z) = z^2$ *ist auf* $G_2 = \{z \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ schlicht.

3. $w = f(z) = e^z$ *ist auf* ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \mathrm{Im}\,(z) < \alpha + \beta\}$ *genau dann schlicht, falls* $0 < \beta \leq 2\pi$ *erfüllt ist.*

2.2. Schlichtheit der Umkehrfunktion einer schlichten Funktion

(Umformulierung des Satzes 1, Kapitel 33, für $\vec{f} = \binom{u}{v}$ auf $f = u + iv$)

Satz 1. $f : G \to \mathbb{C}, w = f(z)$ *sei schlicht auf dem Gebiet* G*. Dann gelten:* $f(G)$ *ist ein Gebiet, die Umkehrfunktion* $g (= f^{-1})$: $f(G) \to G$ *ist schlicht und es gilt*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad w \in f(G)$$

Bemerkung. *Aus „*f *schlicht auf* G*" folgt* $f'(z) \neq 0\ \forall z \in G$*. Aber: Aus „*$f'(z) \neq 0, \forall z \in G$*" folgt i.A. nicht:* f *schlicht auf* G*. Beispiel?*

2.3. Der komplexe Logarithmus

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, fest und $k \in \mathbb{Z}$. Definiere

$$\begin{aligned} P_{\alpha,k} &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha + 2k\pi < \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2(k+1)\pi\} \\ \mathbb{C}_\alpha &:= \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \mid z = re^{i\alpha}, r \geq 0\} \end{aligned}$$

Satz 2. *α, k seien (wie oben und) beliebig, fest. Es gelten:*

$$\exp : P_{\alpha,k} \to \mathbb{C}_\alpha$$

ist schlicht und surjektiv.

Satz 3. *Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wird durch*

$$w = \log(z) := \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad z \neq 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$$

die Funktion $\log : \mathbb{C}_\alpha \to P_{\alpha,k}$ *mit* $\exp(\log(z)) = z,\ z \in \mathbb{C}_\alpha$*, definiert.*

Da exp auf $P_{\alpha,k}$ schlicht ist und $\exp'(z) = \exp(z)$ gilt, ist nach Satz 1 log schlicht, und es gilt

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Dies kann man für $w = \log(z),\ z \in \mathbb{C}_{-\pi},\ k = 0$ (z.B.) explizit nachrechnen.

Hierbei sind die CR-DGLn in Polarkoordinaten nützlich:

Ist $f(re^{i\phi}) = u(r,\phi) + iv(r,\phi)$ holomorph, so gelten

$$\begin{aligned} rD_1u(r,\phi) &= D_2v(r,\phi) \\ D_2u(r,\phi) &= -rD_1v(r,\phi) \end{aligned}$$

Bemerkung. *Wählt man in Satz 3 $\alpha = 0, k = 0$ oder $\alpha = -\pi, k = 0$, so nennt man diese Logarithmusfunktion(en)* Hauptzweig des Logarithmus.

2.4. Potenzen, Wurzeln

Es sei $a \in \mathbb{C}$.

Definition.

$$z^a := e^{a\log(z)}, \quad z \in G,$$

G ist ein Gebiet, in dem log *definiert ist. Also etwa $z \neq 0, -\pi < \arg(z) < \pi$ $(z \in \mathbb{C}_{-\pi})$ oder $z \neq 0, 0 < \arg(z) < 2\pi$ $(z \in \mathbb{C}_0)$*

Es sei z.B. $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi)}, \quad z \in \mathbb{C}_{-\pi}$$

die holomorphe Funktion $(z^a)_k$ definiert. Für $(z^a)_0$, für den Hauptzwei von z^a, schreiben wir z^a. Mit $a = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$, sind

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[k]{|z|}e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

für $z \in \mathbb{C}_0$ (oder $\mathbb{C}_{-\pi}$) die n verschiedenen Lösungen w der Gleichung $w^n = z$ (Vergleiche mit 6.4).

Vorsicht mit aus dem Reellen bekannten Regeln zum Rechnen mit Logarithmen und Potenzen. Diese sind – ohne genaue „Zusatzbetrachtungen“ – i.A. falsch:

Beispiele. *1.* „$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$“: *Ist* $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z),\ z \neq 0, -\pi < \arg(z) < \pi$, *so gilt* $\log(i(-1+i)) = \ln\sqrt{2} - i3\pi/4$, *aber* $\log i + \log(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i5\pi/4$.

2. „$\log(z^a) = a\log(z)$“: *Mit* $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z),\ z \neq 0, \pi/2 < \arg(z) < 5\pi/2$ *würde man erhalten:* $i\pi = \log(-1) = 1/4\log(-1)^4 = 1/4\log(1) = i\pi/2$!

3. Komplexe Kurvenintegrale

3.1. Das komplexe Kurvenintegral

$G \subset \mathbb{C}$ ist ein Gebiet und $\gamma : \xi = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b, z \in C^1[a,b], z'(t) \neq 0$ für $a \leq t \leq b$ (bis auf höchstens endlich viele t), $z(t) \in G$ für $a \leq t \leq b$: ist eine Kurve in G. $f : G \to \mathbb{C},\ f = u + iv$, ist eine auf G definierte stetige Funktion.

Definition.

$$\int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi := \int_a^b f(z(t)z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + i \int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

3.2. Beispiele

1. $\gamma : z(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi/2$. $\int_\gamma \bar{\xi}^2\,\mathrm{d}\xi = 1 + i$

2. $$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = r} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - a)^k} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Der Cauchysche Integralsatz, Die Cauchysche Integralformel

4.1. Erinnerung an Kap 38

4.2. Der Integralsatz von Cauchy

Es sei f holomorph im einfach zusammenhängendem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für jede in G verlaufende stückweise glatte geschlossene Kurve γ:

$$\oint_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Zur Begründung verwende Definition 3.1 und, dass für $f = u + iv$ holomorph die Felder $\left(\begin{smallmatrix} u \\ -v \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ Potentialfelder sind.

4.3. Folgerungen

Wir verwenden die folgende Bezeichnung. Ist γ eine geschlossene positiv orientierte Jordankurve, so bezeichnet $\mathrm{int}(\gamma)$ das Gebiet, das beschränkt ist und γ als Rand hat.

Folgerung (aus Satz 4.2)**.** *Es seien $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ geschlossene positiv orientierte stückweise glatte doppelpunktfreie Kurven mit*

$$\gamma_j \subset \mathrm{int}(\gamma) \ (j = 1, \ldots, m) \ \textit{und} \ \mathrm{int}(\gamma_k) \cap \mathrm{int}(\gamma_l) = \emptyset \ (k \neq l).$$

Dann gilt:

$$\oint_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=1}^{m} \oint_{\gamma_m} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

falls alle Kurven $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ und die Punkte zwischen γ und den Kurven $\gamma_k (k = 1, \ldots, m)$ ganz in einem Gebiet liegen, in dem f holomorph ist.

4.4. Bemerkung

(4.3 mit $m = 1$ und γ, γ_1 konzentrische Kreise) $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph im Gebiet $\mathbb{C}$. Der Kreisring $\{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\}$ liege in G. Es gilt:

$$\oint_{|\xi - z_0| = r} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \oint_{|\xi - z_0| = R} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

4.5. Beispiele

1. (3.2, 2)) γ sei geschlossene doppelpunktfreie positiv orientierte Kurve. Es gelte $a \in \mathrm{int}(\gamma)$. Dann hat man

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi - a)^k} = \begin{cases} 2\pi i, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

2. γ sei positiv orientierte geschlossene doppelpunktfreie Kurve mit $\{0, 1\} \subset \mathrm{int}(\gamma)$. Es gilt

$$\oint_\gamma (2\xi - 1)/(\xi^2 - \xi)\,\mathrm{d}\xi = 4\pi i.$$

Schreibe

$$\frac{2\xi - 1}{\xi^2 - \xi} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 1}.$$

Schließe 0 durch γ_1 und 1 durch γ_2 ein mit $\mathrm{int}\,\gamma_1 \cap \mathrm{int}\,\gamma_2 = \emptyset$ und $\gamma_1 \subset \mathrm{int}(\gamma)$, $\gamma_2 \subset \mathrm{int}(\gamma)$. Verwende 4.3, 4.2 und 4.5,1).

4.6. Die Integralformel von Cauchy

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. $\gamma \subset G$ sei eine stückweise glatte doppelpunktfreie positiv orientierte geschlossene Kurve mit $\mathrm{int}(\gamma) \subset G$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi, \quad z \in \mathrm{int}(\gamma).$$

Zur Begründung: Es sei $z \in \operatorname{int}(\gamma)$. Wähle $\rho > 0$ so klein, dass $\{\xi \mid |\xi - z| \leq \rho\} \subset \operatorname{int}(\gamma)$. Mit 4.3 ($m = 1$) gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z| = \rho} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi}_{f(z)\ (3.2,2)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z| = \rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi}_{\to 0 (\rho \to 0)}\end{aligned}$$

Beispiel. *Behandle Beispiel 4.5,2) mit 4.6.*

5. Die Laurent-Entwicklung, Potenzreihenentwicklung

5.1. Bezeichnungen

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k (= \sum_{k=-\infty}^{-1} \mu_k + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k)$ *ist konvergent (gegen L),* wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ konvergieren und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k = L$$

gilt.

5.2. Die Laurententwicklung

Satz 1. *Es seien $1/R_1$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$ und R_2 der der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$. Dann gelten:*

1. *$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ ist konvergent für alle z mit $R_1 < |z| < R_2$*
2. *Gilt $R_1 < R_2$, so ist f im Kreisring $A = \{z \mid R_1 < |z| < R_2\}$ holomorph.*

Satz 2 (Die Laurententwicklung)**.** *Ist f holomorph in $A = \{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, dann besitzt $f(z)$ für $z \in A$ die eindeutige Darstellung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi.$$

Hierbei ist ρ eine beliebige Zahl mit $R_1 < \rho < R_2$.

5.3. Die Taylorentwicklung

Satz 3 (Taylorentwicklung). *(Setze in Satz 2 $R_1 = 0$) Ist f in $D = \{z \mid |z - z_0| < R_2\}$ holomorph, so gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D,$$

mit

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \rho < R_2$$

Folgerung. *Eine holomorphe Funktion ist in ihrem Definitionsberech beliebig of diff'bar*

Folgerung. *Ist f holomorph auf $\{z \mid |z - z_0| < R_2\}$, so gilt für ρ mit $0 < \rho < R_2$:*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{|\xi - z_0|^{k+1}} \, \mathrm{d}\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5.4. Beispiele

1. Entwickle $f(z) = 1/((z-1)(z-2))$ um $z_0 = 0$ in
   a) $|z| < 1$
   b) $1 < |z| < 2$
   c) $|z| > 2$
2. Gib die Reihe für $f(z) = 1/((z-1)(z-2))$ um $z_0 = 1$ an, die in
   a) in $3/2$
   b) in $5/2$

   konvergiert. (Gesucht ist bei a) die Laurentreihe um $z_0 = 1$ in $0 < |z - 1| < 1$ in b) die um $z_0 = 1$ in $|z - 1| > 1$)
3. $\oint_{|\xi|=3} e^{\xi}/\xi^4 \, \mathrm{d}\xi = \pi i/3$
4. $\oint_{|\xi|=3} e^{-\xi}/(\xi + 2)^3 \, \mathrm{d}\xi = \pi i e^2$

Antwort zu 2)

a) $f(z) = -1/(z-1) - \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k$

b) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{-k-2}$

6. Isolierte Singularitäten

6.1. Definition

f hat in z_0 eine *isolierte Singularität*, falls f in $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ (für ein geeignetes R) holomorph ist, aber nicht in $\{z \mid |z - z_0| < R\}$

6.2. Die verschiedenen isolierten Singularitäten

Es sei z_0 eine isolierte Singularität und

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurent-Reihe in $0 < |z - z_0| < R$.

z_0 heißt *hebbare Singularität*, falls $a_{-k} = 0, \ k = 1, 2, \ldots$

z_0 heißt *Pol der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$, falls $a_{-p} \neq 0$ und $a_k = 0$ für $k < -p$.

z_0 heißt *wesentliche Singularität*, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele Indizes $k < 0$.

6.3. Beispiele

1. $z_0 = 0$ ist für $f(z) = 1/\sin(1/z)$ eine nichtisolierte Singularität (als Limes der isolierten Singularitäten $z_k = 1/(k\pi), \ k = 1, 2, \ldots$)

2. $f(z) = \sin(z)/z$ hat in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

ist überall holomorph.

3. $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ hat in $z_0 = 0$ einen Pol 1. Ordnung.

4. $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(k!)z^{-k}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

7. Der Residuensatz

7.1. $\mathrm{Res}(f; z_0)$: Residuum an einer isolierten Singularität z_0 von f

z_0 sei eine isolierte singuläre Stelle von f und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurententwicklung von f um z_0 in $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

Definition.

$$\mathrm{Res}(f; z_0) := a_{-1}$$

Ist γ eine geschlossene doppelpunktfreie z_0 umlaufende Kurve in $0 < |z - z_0| < R$, so gilt

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Satz 1. *Hat f in z_0 einen Pol der Ordnung p, so gilt*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{p-1}((z - z_0)^p f(z))$$

Im Fall $p = 1$ besagt das:

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = (z - z_0) f(z)|_{z=z_0}$$

Satz 2. *g, h seien holomorphe Funktionen mit $g(z_0) \neq 0,\ h(z_0) = 0,\ h'(z_0) \neq 0$. Es gilt*

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

(Die Vor besagt, dass g/h in z_0 einen Pol 1. Ordnung hat)

Beispiel. $f(z) = 1/(1+z^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ *hat die Polstellen* $z_k = \exp((i\pi + i2(k-1)\pi)(1/n)),\ k = 1, \ldots, n$. *Sie sind alle von 1. Ordnung. Es gilt* $\mathrm{Res}(f; z_k) = -z_k/n,\ k = 1, \ldots, n$.

7.2. Der Residuensatz

Es sei f bis auf isolierte Singularitäten im Gebiet G holomorph. $\gamma \subset G$ sei eine positiv orientierte doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die endlich viele Singularitäten $z_1, \ldots, z_S$ umschließt und selbst durch keine Singularität verläuft. Es gilt dann

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{S} \operatorname{Res}(f; z_k)$$

Satz 3. *$R = R(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, sei eine rationale Funktion in x, y. Es sei $g(t) := R(\sin t, \cos t)$ stetig für $0 \le t \le 2\pi$. Definiere*

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right).$$

Es gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t = \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beispiel. $I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2-2a\cos t+1}\ (a \in \mathbb{R}) \ = \begin{cases} \frac{1}{1-a^2}, & |a| < 1 \\ \frac{1}{a^2-1}, & |a| > 1 \end{cases}$

Satz 4. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\{z \mid \operatorname{Im} z \ge 0\} \subset G$. $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf höchstens endlich viele Polstellen, von denen keine reell ist. z_k, $k = 1, \ldots, S$ seien die Polstellen mit $\operatorname{Im} z_k > 0$. Es sei*

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{it}) Re^{it}\,\mathrm{d}t = 0$$

erfüllt. Dann gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{S} \operatorname{Res}(f; z_k)$$

Beispiel. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x/(1+x^4) = \pi\sqrt{2}/2.$

8. Die Laplace Transformation. Definition

8.1. Die zulässigen Funktionen $\mathcal{Z}$

Definition (der für das folgende *zulässigen Funktionen* $\mathcal{Z}$)**.** $f \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(t) = 0$ *für* $t < 0$.

2. f, f' *sind stetig bis auf* Sprungunstetigkeiten*. In jedem endlichen Intervall gibt es höchstens endlich viele Sprungstellen.*

3. f *ist für* $t \to \infty$ *höchstens von* exponentiellem Wachstum: *es gibt eine reelle Konstante* σ *derart, dass*

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \quad t \geq 0 \tag{E}$$

erfüllt ist. M *ist eine geeignete Konstante.*

Bemerkungen. 1. *Sind* $f, g \in \mathcal{Z}$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*, so ist auch* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{Z}$*. (*$\mathcal{Z}$ *ist ein komplexer Vektorraum mit* $+$ *(Addition von Funktionen) und der üblichen skalaren Multiplikation bei Funktionen)*

2. *Gilt (E), so gilt (E) für alle* $\sigma' > \sigma$*. Die kleinste Zahl* σ_0 *mit: (E) gilt für jedes* $\sigma > \sigma_0$ *heißt der* Wachstumskoeffizient von f

3. *Für* $f(t) = \exp(\exp(t))$ *oder* $f(t) = \exp(t^2)$ *ist (E) nicht erfüllbar.*

8.2. Beispiele

1. $h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (Heavyside Funktion) $h \in \mathcal{Z},\ \sigma_0 = 0.$

2. $n \in \mathbb{N}.\ f(t) = h(t)t^n,\ f \in \mathcal{Z},\ \sigma_0 = 0$

3. $f(t) = h(t)e^{at}$ $(a \in \mathbb{C}, a = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $f \in \mathcal{Z},\ \sigma_0 = \alpha$

8.3. Das Laplace Integral

Satz 1. *Es sei $f \in \mathcal{Z}$ mit dem Wachstumskoeffizient σ_0. Es sei $s = \sigma + i\omega,\ \sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

absolut konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$.

8.4. Die Laplace Transformation

Die hierdurch für s mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ definierte Funktion F heißt *die Laplace Transformation von f*. Hierfür schreiben wir auch

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$$

oder mittels des Doetsch Symbols in der folgenden Form

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s).$$

Die Zuordnung $f \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F$ heißt *Laplace Transformation.* $\mathcal{L}$ ist linear:

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g), \quad f, g \in \mathcal{Z}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Beispiele. *1.* $\mathcal{L}(h)(s) = H(s) = 1/s,\ \mathrm{Re}\,(s) > 0$. *Das wird auch so geschrieben:*

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0)$$

2. $f_n(t) := h(t)t^n,\ n \in \mathbb{N}$.

$$h(t)t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0)$$

3. $f(t) = h(t)e^{at}$ *(*$a \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(a) = \alpha$*)*

$$h(t)e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > \alpha)$$

4. $(\omega \in \mathbb{R})$

$$h(t)\sin \omega t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0)$$
$$h(t)\cos \omega t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0)$$

5. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wie folgt gegeben:

$$\begin{cases} f(t) = 0, \quad t < 0 \\ \quad f = f(t) \quad 0 \leq t < T \\ f(t) = f(t+T), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

(Das ist die T-periodische Fortsetzung von f $[0, T]$ auf $[0, \infty]$)

Satz 2.

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Testen Sie sich und die Formel mit $f(t) = h(t) \sin \omega t$. (oben Beispiele 4.)

9. Analytische Eigenschaften der Laplace Transformierten

9.1.

Satz 1. *Es sei F die Laplace Transformierte einer Funktion $f \in \mathcal{Z}$ mit dem Wachstumskoeffizienten σ_0. Dann ist F holomorph in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0\}$. Es gilt*

$$F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d.h.

$$-tf(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F'(s),$$

falls $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$.

9.2.

Satz 2. *Ist $f \in \mathcal{Z}$, so gilt $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, wobei $s \to \infty$ in dem Sinn zu verstehen ist, dass $\mathrm{Re}\,(s) \to \infty$ gilt.*

9.3.

Satz 3. *Aus $f_1, f_2 \in \mathcal{Z}$ und $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$ folgt $f_1(t) = f_2(t)$ für alle t, in denen f_1 und f_2 stetig sind.*

Bemerkung. *Zwei Funnktionen aus $\mathcal{Z}$, die sich höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden, werden als gleich definiert.*

Der Satz vorher gibt dann eine eindeutige Zuordnung

$$\begin{aligned} F\,(=\mathcal{L}(f)) &\mapsto f \\ \mathcal{L}(\mathcal{Z}) &\to \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Diese Zuordnung heißt die inverse Laplace Transformation. *Sie wird durch* $\mathcal{L}^{-1}$ *bezeichnet:* $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$*, falls* $\mathcal{L}(f) = F$*.*

9.4. Beispiel

Aus f stetig für $t > 0$ und $f, f' \in \mathcal{Z}$ und $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$ folgt

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0+) \tag{*}$$

Hiermit kann das Problem

$$\begin{aligned} y'(t) - y(t) = 1, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{aligned}$$

Laplace transformiert werden. Es ergibt sich für $Y = \mathcal{L}(y)$ die folgende Gleichung:

$$sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s}$$

$\Rightarrow$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

Mit Satz 3 und $e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet 1/(s-a),\ 1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet 1/s$ (8.5) folgt

$$y(t) = e^t - 1, \quad t \geq 0.$$

10. Regeln zum Rechnen mit $\mathcal{L}$

10.1. Ähnlichkeitstransformation

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s),\ c$ konst $> 0,\ f \in \mathcal{Z}$

$$\Rightarrow f(ct) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

10.2. Verschiebungssatz

$f \in \mathcal{Z},\ f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Es gilt für jedes $T > 0$:

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-sT} F(s)$$

Beispiel. *$A > 0$, konst. $f(t) = nA,\ (n-1)T \leq t \leq nT,\ n = 1, 2, \ldots,\ f(t) = 0,\ t < 0$.*

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s} \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0)$$

10.3. Dämpfungssatz

Mit $f \in \mathcal{Z}, \sigma_0, a \in \mathbb{C}$ und $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s),\ \mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$ folgt

$$e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a) \quad (\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0 + \mathrm{Re}\,(a))$$

10.4. Differentiationssatz (im Urbild)

Es sei f für $t > 0$ n-mal diff'bar, $\mathcal{L}(f^{(n)})(s)$ existiere für $s = \sigma_0 > 0$. Dann konvergiert $\mathcal{L}(f)(s)$ für $s = \sigma_0$, es existieren

$$\lim_{t \to 0+} f^{(k)}(t) = f^{(k)}(0+) \quad (k = 0, \ldots, n-1),$$

und es gilt

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0+)$$

für $s = \sigma_0$ und s mit $\mathrm{Re}\,(s) > \sigma_0$.

Begründung mit 9.4 (*) ($n = 1$) und vollständiger Induktion

Beispiele. *1.* $\sin \omega t$ *ist die Lösung des Problems*

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \omega \end{cases} \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

Für $Y = \mathcal{L}(y)$ *folgt:* $s^2 Y(s) - \omega + \omega^2 Y(s) = 0$, *oder:*

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{8.5, 4}$$

2. $n \in \mathbb{N},\ t \geq 0$ *Für* $f(t) = t^n$ *gelten* $f^{(n)}(t) = n!$ *und* $f^{(k)}(0+) = 0,\ k = 0, \dots, n-1.$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f^{(n)})(s) = \frac{n!}{s} = s^n \mathcal{L}(t^n)$$

$$\Rightarrow t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{8.5, 2}$$

10.5. Differentiation im Bild

$$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F^{(n)}(s)$$

Beispiel. *Mit* $e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, 1/(s-a)$ *folgt*

$$t^n e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

10.6. Integralsatz (für das Urbild)

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{F(s)}{s}$$

11. Das Anfangswertproblem für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

11.1. Prolemformulierung, Übertragen in den Bildraum

a, b, c, y_0, y_0' sind gegebene Konstanten, $f = f(t) \in \mathcal{Z}$ ist gegeben.

Gesucht ist $y = y(t)$ mit

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_0' \end{cases}$$

Es sei $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$, $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$. Wende $\mathcal{L}$ auf (P) an. Man erhält:

$$Y(s) = \frac{as+b}{as^2+bs+c} y_0 + \frac{a}{as^2+bs+c} y_0' + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

11.2. Lösung des Problems aus 11.1

Mit

$$\begin{aligned} y_1(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{as+b}{as^2+bs+c}, \\ y_2(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{as^2+bs+c}, \text{ und} \\ y_p(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{as^2+bs+c} \end{aligned}$$

erhält man als Lösung von (P):

$$y(t) = y_0 y_1(t) + y_0' y_2(t) + y_p(t)$$

12. Die Faltung (zu y_p in 11.2)

12.1. Faltungssatz

Für $f, g \in \mathcal{Z}$ ist

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

ebenfalls aus $\mathcal{Z}$. Es gilt

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Bemerkungen. *0. $f * g$ heißt* Faltung *von f und g.*

1. Es gelten

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ (f * g) * p &= f * (g * p) \\ f * (g + p) &= f * g + f * p \end{aligned}$$

2. Es gilt i.A. nicht *$f * 1 = f$ und $f * f = f^2$. $f * f$ kann negativ sein.*
Beispiele. *a) Berechne $1 * 1$ und mit $f(t) = t^2,\ g(t) = 1$ die Faltung $f * g$.*

b) Es sei $f(t) = \cos t$. Diskutiere $f * f$.

12.2. y_p aus 11.2

Es ist (11.2)

$$y_p(t) = \left(f * \frac{y_2}{a}\right)(t)$$

12.3. Beispiel

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1}{s+\alpha} = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(s+\alpha)} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, ? \quad (\omega, \alpha \in \mathbb{R})$$

Mit $\omega/(s^2+\omega^2) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \sin\omega t := u(t)$, $1/(s+\alpha) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ e^{-\alpha t} =: v(t)$ folgt

$$f(t) = (u * v)(t) = \frac{\alpha \sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}$$

13. Rücktransformation rationaler Funktionen. Zur Partialbruchzerlegung (PBZ)

13.1. Die Partialbruchzerlegung

Es seien p und q Polynome mit $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ und ohne gemeinsame Nullstellen.

Zerlege

$$q(x) = \prod_{j=1}^{l} (x - a_j)^{k_j}.$$

$a_1, \ldots, a_l$ sind die verschiedenen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten k_j; $k_j \in \mathbb{N}, k_1 + \ldots + k_l = \operatorname{grad}(q)$.

Es gibt dann eindeutig Zahlen γ_{km} mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\gamma_{j1}}{(x-a_j)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}}{(x-a_j)^{k_j}} \right) \tag{*}$$

Die Ausdrücke $1/(x - a_j)^k$ heißen *Partialbrüche*. (*) ist die *Partialbruchzerlegung* von p/q.

13.2. Rücktransformation rationaler Feunktionen mit einfachen Polstellen

Gesucht ist $f(t)$ mit

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s) = \frac{G(s)}{N(s)}.$$

Hier sind G, N Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, mit $\operatorname{grad}(G) < \operatorname{grad}(N) =: n$.

N besitze nur einfache Nullstellen: $s_1, \ldots, s_n$.

Also:

$$N(s) = (s - s_1) \ldots (s - s_n)$$

Der PBZ-Ansatz für F lautet hier:

$$\frac{G(s)}{N(s)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{s - s_j}$$

Man findet $\gamma_k = G(s_k)/N'(s_k)$, also

$$F(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{G(s_k)}{N'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}$$

und mit $1/(s - s_k) \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{s_k t}$ erhält man

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{G(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t}$$

13.3. Rücktransformation von $1/(s(s+a)^n)$ $(n \in \mathbb{N}, a \neq 0)$

Es sei $a \neq 0$. Zu

$$F(s) = \frac{1}{s(s+a)^n}$$

ist $f(t)$ mit $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ gesucht. Der PB-Ansatz ist hier

$$F(s) = \frac{\gamma_0}{s} + \sum_{k=1} n \frac{\gamma_k}{(s+a)^k}.$$

$f(t)$ ist wegen

$$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(t) \text{ und}$$
$$\frac{1}{(s+a)^k} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-at} h(t)$$

kein Problem. Man findet: $\gamma_0 = \lim_{s \to 0} sF(s) = 1/a^n$ und

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \to -a} D^{n-k} \left[(s+a)^n F(s) \right] \\ &= -\frac{1}{a^{n-k+1}}, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Übung. *Löse mittels Anwendung der Laplace Transformation*

$$\begin{aligned} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= h(t) - h(t-1) + h(t-2) - h(t-3) + h(t-4) - h(t-5) \\ y(0) &= y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Was heißt hier eigentlich „Lösung"?

14. Bemerkungen zur Dirac (Delta) „Funktion“

14.1. $\delta(x - x_0)$

$\delta(x-x_0)(=\delta(x_0-x))$ wird durch die Wirkung auf eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ definiert durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(x_0),$$

wobei das Integral als Grenzwert $\lim_{a\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x_0-x)f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen ist. Hierbei sind $\delta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(D1) $\delta_a \geq 0 \ \forall a$

(D2) $\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x) \ x = 1 \ \forall a$

(D3) Für jedes $r > 0$ gilt $\lim_{a\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus\{|x|<r\}} \delta_a(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Deutet man δ_a als Dichten von Massenverteilungen, so besagt (D2), dass für jedes a die Gesamtmasse konstant 1 ist, und (D3), dass sich die Gesamtmasse mit $a \to 0$ im Nullpunkt konzentriert.

Beispiele für mögliche Funktionen δ_a („Realisierungen für $\delta(x-x_0)$):

$$\begin{aligned}
\delta_a^{(1)}(x) &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}, \\
\delta_a^{(2)}(x) &= \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\right)^2, \\
\delta_a^{(3)}(x) &= \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}, \\
\delta_a^{(4)}(x) &= \frac{2}{\pi a}\frac{1}{e^{x/a}+e^{-x/a}}, \\
\delta_a^{(5)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}
\end{aligned}$$

14.2. Laplace Transformierte von $\delta(t-t_0)$ $(t_0 > 0)$:

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = e^{-st_0}$$

Dies kann man realisieren z.B. mit

$$\delta_a^{(6)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \le t \le a \\ 0, & t < 0, t > a \end{cases}$$

($\delta_a^{(6)}$ hat die Eigenschaften (D1), (D2), (D3)) und es gilt

$$\delta_a^{(6)}(t) = \frac{1}{a}(h(t) - h(t-a)) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s}\right) \to 1 \ (a \to 0)$$

und mit 10.2

$$\delta_a^{(6)}(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - e^{-as}\frac{1}{s}\right) \to e^{-st_0} \ (a \to 0)$$

14.3. Beispiel

$$\begin{aligned} Ly(t) := y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 3\delta(t-1) + \delta(t-2), \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{aligned}$$

Lösungen:

$$y(t) = e^{2t}(1-t)h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)$$

Diese „Lösung“ ist so zu verstehen:

- $0 \le t < 1$: $y(t) = y_1(t) := e^{2t}(1-t)$ löst $Ly = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 1$
- $1 \le t < 2$: $y(t) = y_2(t) := e^{2t}(1-t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}$ löst $Ly = 0$ mit $y_1(1) = y_2(1)$ und $y_2'(1) - y_1'(1) = 3$
- $2 \le t$: $y(t) = y_3(t) := y_2(t) + (t-2)e^{2(t-2)}$ löst $Ly = 0$ mit $y_2(2) = y_3(2)$, $y_3'(2) - y_2'(2) = 1$.

Wird durch die Gleichung die Bewegung eines Teilchens der Masse 1 (Koeffizient bei $y''(t)$) beschrieben, so besagt die rechte Seite $3\delta(t-1)+\delta(t-2)$, wie sich der Impuls des Teilchens zur Zeit $t=1$ und zur Zeit $t=2$ ändert: zur Zeit $t=1$ springt die Geschwindigkeit um 3, zur Zeit $t=2$ springt die Geschwindigkeit um 1

Ein paar zusätzliche Literaturanregungen zu den Wochen 11 - 14:

- Harici / Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure: 2 Bände. Insbesondere der letzte Teil von Band 2 (Basel 1980)
- Ameling: Laplace-Transformation (Braunschweig 1979)
- Davies: Integral Transforms and their Applications (New York 1978)
- Doetsch: Einführung in Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation (Stuttgart 1976)