

Übungen

Aufgabe 1.1 Gegeben seien Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ regulär sind und bestimmen Sie $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $(\mathbf{AB})^{-1}$, $(\mathbf{A}^T)^{-1}$ und $((\mathbf{AB})^T)^{-1}$.
- Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = (1, -1, 0, 0)^T$ und $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)^T$.

Aufgabe 1.2 Es sei $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Durch

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$$

wird eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert.

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich B .
- Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbf{c}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c}_2 := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{c}_3 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

eine weitere Basis $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben ist. Stellen Sie die $\mathbf{e}_j$ bezüglich dieser Basis dar, und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bezüglich C an.

- Stellen Sie $f(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)$ bezüglich B und bezüglich C dar.

Aufgabe 1.3 Es sei eine lineare Abbildung definiert durch

$$(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (7x_1 - 2x_2 - 3x_3, -5x_1 + x_2 + 2x_3, -3x_1 + x_2 + x_3)^T.$$

- Geben Sie die Abbildungsmatrix A dieser linearen Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ an und zeigen Sie, dass diese lineare Abbildung bijektiv ist.
- Ein Parallelotop mit Volumen V werde durch die lineare Transformation $y = Ax$ auf ein Parallelotop mit dem Volumen $\tilde{V}$ abgebildet. Berechnen Sie das Volumen $\tilde{V}$.
- Ein Parallelotop mit Volumen W werde durch die lineare Transformation $y = A^{-1}x$ auf ein Parallelotop mit dem Volumen $\tilde{W}$ abgebildet. Berechnen Sie das Volumen $\tilde{W}$.

Hörsaalübung am 25.4.06: Aufgaben 1.1, 1.2, 1.3.