

Übungen

Aufgabe 2.1 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ seien Basen des $\mathbb{R}^4$ bzw. des $\mathbb{R}^3$. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung f bzgl. dieser Basen.

- a) Berechnen Sie Kern f und eine Basis des Bildraums von f .
- b) Bestimmen Sie Basen M des $\mathbb{R}^4$ und N des $\mathbb{R}^3$ so, dass f bezogen auf diese Basen die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

Aufgabe 2.2 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit dem Entwicklungssatz von Laplace sowie mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.3 Zeigen Sie die Cramersche Regel: Ist $A = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren a^k , so lässt sich die (eindeutige) Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{C}^n$ angeben durch

$$x_k = \frac{\det(a^1, \dots, b, \dots, a^n)}{\det(a^1, \dots, a^k, \dots, a^n)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Hinweis: Aus $Ax = b$ folgt $b = \sum_{k=1}^n x_k a^k$. Berechnen Sie $\det(a^1, \dots, b, \dots, a^n)$ mit b an der k -ten Stelle.

Aufgabe 2.4 a) Die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei festgelegt durch

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_3, \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \quad T(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrizen von T bezüglich der kanonischen Basis und der Basis $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^T$ und $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 6)^T$ an.

b) Die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der kanonischen Basis gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Basen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (5, 3)^T \in \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{w}_1 &= (1, 2, 2)^T, \quad \mathbf{w}_2 = (1, 3, 4)^T, \quad \mathbf{w}_3 = (2, 4, 5)^T \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

an. Welche Koordinaten besitzt $T(2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2)$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$?

Aufgabe 2.5 Es sei W der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum des $\mathbb{R}^4$.

- Bestimmen Sie die Dimension von W , eine Basis von W und mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von W .
- Sei P die orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^4$ auf W . Bestimmen Sie $P(x)$ von $x = (0, 0, 0, 1)^T$ sowie den minimalen Abstand $\min_{\mathbf{w} \in W} \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|_2$ von x und W . Wie lautet die Matrix von P und die Matrix der orthogonalen Projektion des $\mathbb{R}^4$ auf $W^\perp$ bezüglich der kanonischen Basis?

Aufgabe 2.6 a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit dem Entwicklungssatz von Laplace sowie mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie das Volumen des durch die Vektoren $(1, 4, 2, 5)^T$, $(2, 0, 0, 0)^T$, $(2, 3, 4, 0)^T$, $(0, 0, 9, 8)^T$ aufgespannten Parallelotops.

Hörsaalübung am 2.5.06: Aufgaben 2.1, 2.2, 2.3,

Tutorien in der Woche 2.–5.5.06: Aufgaben 2.4, 2.5, 2.6.