Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1

$$* \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{Kern}(\vec{f}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}\}$

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 + x_4\vec{b}_4$ wird $A\vec{x} = \vec{0}$

mittels elementarer Zeilenumformungen* zu

$x_1 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4$, $x_2 = -\frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4$, $x_3 = x_3$, $x_4 = x_4$

$\begin{pmatrix} x_3 = 5\alpha \\ x_4 = 5\beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; also

$\underline{\operatorname{Kern}(\vec{f}) = \operatorname{Spann}(\vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 5\vec{b}_3,\ 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 5\vec{b}_4)}$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ seien die Spalten von A. Es ist

$\vec{f}(\mathbb{R}^4) = \operatorname{Spann}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = \operatorname{Spann}(\underbrace{\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4}_{=\vec{0}}, \underbrace{\vec{a}_2 - \frac{3}{2}\vec{a}_3 + \frac{1}{2}\vec{a}_4}_{=\vec{0}}, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$

$= \operatorname{Spann}(\vec{a}_3, \vec{a}_4) = \operatorname{Spann}(2\vec{c}_1 + \vec{c}_2, \vec{c}_2 - 2\vec{c}_3)$

$\underline{2\vec{c}_1 + \vec{c}_2 \text{ und } \vec{c}_2 - 2\vec{c}_3}$ sind in $\mathbb{R}^3$ l.u.

(da $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ dies nach Vor. sind). Sie bilden somit

eine Basis des Bildraumes $\vec{f}(\mathbb{R}^4)$.

2.1 **b)** gesucht sind $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4 \in \mathbb{R}^4$ und l.u.
und $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3 \in \mathbb{R}^3$ l.u. mit

$\vec{f}(\vec{d}_k) = \vec{j}_k$ $(k=1,2)$ und $\vec{f}(\vec{d}_\ell) = \vec{0}$ $(\ell = 3,4)$

Aus a) folgt, dass gewählt werden können

$\vec{d}_3 = \vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 5\vec{b}_3$, $\vec{d}_4 = 3\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 5\vec{b}_4$ (sind l.u.).

Durch $\vec{d}_1 := \vec{b}_1$, $\vec{d}_2 := \vec{b}_2$ werden $\vec{d}_3, \vec{d}_4$ zu einer Basis M des $\mathbb{R}^4$ ergänzt: $\mathrm{Spann}(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4)$

$= \mathrm{Spann}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \frac{1}{5}(\vec{d}_3 - \vec{d}_1 + 4\vec{d}_2), \frac{1}{5}(\vec{d}_4 - 3\vec{d}_1 + 2\vec{d}_2))$

$= \mathrm{Spann}(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \mathbb{R}^4$.

$N = \{\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3\}$ wobei $\vec{j}_1 = \vec{f}(\vec{b}_1) = 2\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + 4\vec{c}_3$

$\vec{j}_2 = \vec{f}(\vec{b}_2) = 3\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{c}_3$ ist. $\vec{j}_1, \vec{j}_2$ werden z.B. durch

$\vec{j}_3 := \vec{c}_3$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt

(Dass $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ l.u. sind, folgt daraus, dass $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ l.u. sind).

Nach Konstruktion ist $\tilde{A}$ die $\vec{f} : (\mathbb{R}^4, M) \to (\mathbb{R}^3, N)$
darstellende Matrix.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2

i) Entwicklung der Determinante zum Beispiel nach der 3. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 6\cdot(-48) - 4\cdot(-72) = 0$$

Forme die Determinante mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform um. Dann ergibt sich die Determinante als Produkt der Diagonalelemente.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ii) Entwicklung der Determinante zum Beispiel nach der 4. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Forme die Determinante mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform um. Dann ergibt sich die Determinante als Produkt der Diagonalelemente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8$$

Aufgabe 2.3

$$Ax = b \iff b = \sum_{k=1}^{n} x_k a^k,$$

$$\begin{aligned}
\det(a^1, \ldots, \underbrace{b}_{k\text{-te Stelle}}, \ldots, a^n) &= \det(a^1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j a^j, \ldots, a^n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\det(a^1, \ldots a^j, \ldots, a^n)}_{=0 \text{ für } j \neq k} \\
&= x_k \cdot \det(a^1, \ldots, a^k, \ldots, a^n)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 a) Die Koordinatenvektoren der Bilder des Basisivektoren, unter der Abbildung T des j-ten Basisvektors (aus dem Urbildraum), stehen in der j-ten Spalte der Abbildungsmatrix von T. Daher lautet die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ von T bezüglich der kanonischen Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ im Urbild- und im Bildraum

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsmatrix $\mathbf{S}$ des Basisübergangs von $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ auf $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ergibt sich durch:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^{3} s_{jk}\mathbf{e}_j,\ \ k = 1,2,3 \iff (\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{S} = \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$ von T bezüglich der Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ im Urbild- und Bildraum ergibt sich nun nach Berechnung von $\mathbf{S}^{-1}$ durch $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{, wobei} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

oder ohne Berechnung von $\mathbf{S}^{-1}$ durch Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{SB} = \mathbf{AS}$.

b) Es ist: $\mathbf{v}_1 = (1,1)^T = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{v}_2 = (5,3)^T = 5\cdot\mathbf{e}_1 + 3\cdot\mathbf{e}_2$.
Die Koordinatenvektoren bezüglich der kanonischen Basis im Bildraum ergeben sich durch $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (1,0,3)^T$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = (3,4,15)^T$ und $T(2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2) = (-4,12,6)^T$.
Die Darstellung dieser Koordinatenvektoren in der Basis $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ ergibt sich aus der Lösung des Gleichungsystems.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 15 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 9 & 14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 13 & -26 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 13 & -26 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -21 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 13 & -26 \end{array}\right)$$

Als Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$ der Abbildung T und als Koordinatenvektor x von $T(2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2)$ in der Basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ im $\mathbb{R}^2$ und $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir somit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ -2 & -2 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 20 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.5

a) Die Vektoren werden zeilenweise notiert. Durch Zeilenumformungen nach Gauß untersuchen, ob in den unteren Zeilen Nullzeilen erzeugt werden können.

$$\begin{pmatrix} (1, & 0, & 1, & 0) & = \mathbf{v}_1^T \\ (1, & 1, & 1, & 1) & = \mathbf{v}_2^T \\ (1, & 1, & 2, & 2) & = \mathbf{v}_3^T \\ (0, & 1, & -1, & 0) & = \mathbf{v}_4^T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1, & 0, & 1, & 0) & = \mathbf{v}_1^T \\ (0, & 1, & 0, & 1) & = \mathbf{v}_2^T - \mathbf{v}_1^T \\ (0, & 1, & 1, & 2) & = \mathbf{v}_3^T - \mathbf{v}_1^T \\ (0, & 1, & -1, & 0) & = \mathbf{v}_4^T \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (1, & 0, & 1, & 0) & = \mathbf{v}_1^T \\ (0, & 1, & 0, & 1) & = \mathbf{v}_2^T - \mathbf{v}_1^T \\ (0, & 0, & 1, & 1) & = \mathbf{v}_3^T - \mathbf{v}_2^T \\ (0, & 0, & 0, & 0) & = \mathbf{v}_4^T + \mathbf{v}_3^T - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1^T \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim W = 3$$

Als Basis von W können $\tilde{\mathbf{v}}_1 = (1,0,1,0)^T, \tilde{\mathbf{v}}_2 = (0,1,0,1)^T, \tilde{\mathbf{v}}_3 = (0,0,1,1)^T$,
Gram-Schmidt-Orthonormalisierung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &:= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T \\
\mathbf{u}_2 &:= \tilde{\mathbf{v}}_2 - <\tilde{\mathbf{v}}_2, \mathbf{w}_1> \mathbf{w}_1 = (0,1,0,1)^T - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T = (0,1,0,1)^T \\
\mathbf{w}_2 &:= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T \\
\mathbf{u}_3 &:= \tilde{\mathbf{v}}_3 - <\tilde{\mathbf{v}}_3, \mathbf{w}_1> \mathbf{w}_1 - <\tilde{\mathbf{v}}_3, \mathbf{w}_2> \mathbf{w}_2 = (0,0,1,1)^T - \frac{1}{2}(1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(0,1,0,1)^T \\
&= \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T \\
\mathbf{w}_2 &:= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \mathbf{u}_3
\end{aligned}$$

b) $P(x) = \langle w_1, x \rangle w_1 + \langle w_2, x \rangle w_2 + \langle w_3, x \rangle w_3$

$= \frac{1}{4} (-1, 1, 1, 3)^T$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf $W^\perp$ ist:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \min_{\mathbf{w} \in W} \|x - \mathbf{w}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{Px}\|_2 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.6

a) Entwicklung der Determinante zum Beispiel nach der 2. Spalte:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

insgesamt: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -1$

Forme die Determinante mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform um. Dann ergibt sich die Determinante als Produkt der Diagonalelemente.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$$

b) Das Volumen V des Parallelotops ergibt sich aus

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \right| = \left| -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \right| = |-2 \cdot 215| = 430$$