

Übungen

Aufgabe 3.1 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren, die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte und falls möglich eine Matrix S , welche auf Diagonalform transformiert.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -4 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix P an, so dass $P^T A P$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Matrix A^k .

Aufgabe 3.3 Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sei die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung ϕ gegeben durch

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ eine Drehung ist.

b) Bestimmen Sie alle - auch die komplexwertigen - Eigenwerte von ϕ und eine Matrix S , so dass $S^{-1} A S$ Diagonalgestalt hat.

c) Es sei v ein Eigenvektor von ϕ zu einem der beiden nicht reellwertigen Eigenwerte. Zeigen Sie, dass $\bar{v}$ ein Eigenvektor zum anderen nicht reellwertigen Eigenwert ist.

d) Es sei v_1 ein Eigenvektor von ϕ zu $\lambda_1 = 1$ und v_2 ein Eigenvektor zu einem der beiden nicht reellwertigen Eigenwerte. Bilden Sie aus v_1 , $\operatorname{Re}(v_2)$ und $\operatorname{Im}(v_2)$ eine Orthonormalbasis und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis.

e) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel θ der Drehung ϕ .

Aufgabe 3.4 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren, die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte und falls möglich eine Matrix S , welche auf Diagonalform transformiert.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.5 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 0 & 1 - \alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 - \alpha & 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix P , so dass $P^T A_\alpha P = \text{diag}(1, 2, 3)$ gilt? Geben Sie P an.

Aufgabe 3.6 Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nennen wir *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.
2. Haben alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit 1 und gilt $AB = BA$, so sind A, B simultan diagonalisierbar.

Hörsaalübung am 9.5.06: Aufgaben 3.1, 3.2, 3.3,

Tutorien in der Woche 8.–12.5.06: Aufgaben 3.4, 3.5, 3.6.