Blatt 3 (Hörsaalübung)

Aufgabe 3.1

a)

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2: \quad (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$

Es ist dim $E_1 = g(1) = 1 = a(1)$. Es ist Rang $(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 2$, d.h. zum Eigenraum E_2 gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor. Es ist somit dim $E_2 = g(2) = 1 < 2 = a(2)$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar, denn geometrische Vielfachheit $g(2)$ und algebraische Vielfachheit $a(2)$ stimmen nicht überein.

b)

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 7 & -3 \\ -4 & 7-\lambda & -2 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{S_1 \to \underline{S_1}+S_2}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 & -3 \\ 3-\lambda & 7-\lambda & -2 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{E.Z_3}{=} (-3)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3-\lambda & -2 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 3-\lambda & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3)(1-\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+7) = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{B}-\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2: \quad (\mathbf{B}-2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -3 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$

Es ist dim $E_1 = g(1) = 1 = a(1)$. Mit Gauß: $(\mathbf{B}-2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Rang $(\mathbf{B}-2\mathbf{I}) = 2$, d.h. zum Eigenraum E_2 gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor. Es ist somit dim $E_2 = g(2) = 1 < 2 = a(2)$. Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar.

c) Die Matrix $\mathbf{C}$ ist reell und symmetrisch und somit diagonalisierbar. Die Transformationsmatrix bei der Diagonalisierung kann sogar orthogonal gewählt werden.
Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 3$.
Eigenvektoren:
$\lambda_{1,2} = 0: \;\; \mathbf{v}_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\lambda_3 = 3: \;\; \mathbf{v}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \gamma \in \mathbb{R}$
Es ist $\dim E_3 = g(3) = 1 = a(3)$ und $\dim E_0 = g(0) = 2 = a(0)$. Eine auf Diagonalgestalt transformierende Matrix lautet:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix C symmetrisch ist, sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bereits orthogonal zueinander. Um eine orthogonale Transformationsmatrix zu erhalten, hätten wir daher nur zum Beispiel den zweiten Spaltenvektor von S durch das Kreuzprodukt des ersten und des dritten Spaltenvektors ersetzen oder mittels des Gram-Schmidt Verfahrens orthonormieren müssen und dann die Spaltenvektoren auf Länge 1 normieren müssen.

Aufgabe 3.2

a) Wir berechnen die Determinante von $(A - \lambda E)$:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}}{=} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

mit $S_2 \to S_2 + S_4$ und Entwicklung nach Z_4 folgt

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

und $S_2 \to S_2 - S_3$ sowie Entwicklung nach Z_3 liefert

$$= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3$$

Also: Die Matrix besitzt die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen noch die Eigenräume: Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0E)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_i \text{ permutieren}]{Z_i\to\frac{1}{4}Z_i,\, i=1,3,4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4-Z_3]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1\to Z_1+2Z_3]{Z_2\to Z_2-Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten den Eigenraum $E_0(A) = \mathbb{R}\cdot\vec{c}_1$, wobei $\vec{c}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander; es bleibt also nur die erste Zeile übrig. Es folgt

$$E_4(A) = \mathbb{R}\,\vec{c}_2 \oplus \mathbb{R}\,\vec{c}_3 \oplus \mathbb{R}\,\vec{c}_4\,, \text{ mit } \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}, \vec{c_4}$ sind linear unabhängig, also ist $C := [\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}, \vec{c_4}]$ eine reguläre Matrix mit $C^{-1}A\,C = diag(0, 4, 4, 4)$. Um eine *orthogonale* Matrix P zu bekommen, die A auf Diagonalform bringt, müssen wir die Spalten von C noch orthonormieren. D.h. wir müssen aus ihnen ein Orthonormalsystem $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \vec{p_4}$ von Eigenvektoren gewinnen. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind bei symmetrischen Matrizen orthogonal zueinander, daher können wir die Eigenräume unabhängig voneinander behandeln. Wir wählen also $\vec{p_1} := \vec{c_1}/\|\vec{c_1}\|$ und wenden uns dann dem Eigenraum $E_4(A)$ zu. Dort könnten wir auf die Vektoren $\vec{c_2}, \vec{c_3}, \vec{c_4}$ das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden, aber wir gehen stattdessen lieber von den Vektoren $\vec{c_2}, \vec{c_3} + \vec{c_4}, \vec{c_4}$ aus (diese spannen ebenfalls $E_4(A)$ auf), da hier die beiden ersten Vektoren schon senkrecht zueinander sind. Wir erhalten dann zunächst ein Orthogonalsystem: $\vec{v_2} := \vec{c_2} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v_3} := \vec{c_3} + \vec{c_4} = (0, 0, 1, 1)$ und

$$\vec{v_4} := \vec{c_4} - \frac{< \vec{c_4}, \vec{v_2} >}{\|\vec{v_2}\|^2}\vec{v_2} - \frac{< \vec{c_4}, \vec{v_3} >}{\|\vec{v_3}\|^2}\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir noch $\vec{p_j} := \vec{v_j}/\|\vec{v_j}\|$ für $j = 2, 3, 4$. Dann gilt $P^TAP = diag(0, 4, 4, 4) =: D$ mit

$$P := [\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \vec{p_4}] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $A^k = (PDP^T)^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$
$= P\,diag(0, 4^k, 4^k, 4^k)\,P^{-1} = 4^{k-1}A$

Aufgabe 3.3
a) Die Matrix A ist orthogonal, und es ist det A =1. Daher ist ϕ eine Drehung.

b) Wir berechnen die Determinante von $(A - \lambda E)$:

$$\det(A-\lambda E) = \frac{1}{3^3}\det\begin{pmatrix}1-3\lambda & 2 & 2\\ 2 & 1-3\lambda & -2\\ -2 & 2 & -1-3\lambda\end{pmatrix} \overset{Z_1\to Z_1+Z_2}{=} \frac{1}{3^3}\det\begin{pmatrix}3-3\lambda & 3-3\lambda & 0\\ 2 & 1-3\lambda & -2\\ -2 & 2 & -1-3\lambda\end{pmatrix};$$

mit $S_2 \to S_2 - S_1$ und Entwicklung nach Z_2 folgt

$$= \frac{1}{3^3}(3-3\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}-1-3\lambda & -2\\ 4 & -1-3\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda+1)$$

Dies liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$ und $\lambda_3 = \bar{\lambda_2}$.

$$\lambda_1 = 1: \quad (A-I)v_1 = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix} v_1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad v_1 = \gamma\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}, \gamma\in\mathbb{C}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i: \quad (A+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2\sqrt{2}}{3}i)I)v_2 = \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}i & 1 & 1\\ 1 & 1-\sqrt{2}i & -1\\ -1 & 1 & -\sqrt{2}i\end{pmatrix} v_2 = 0$$

$$\Longrightarrow\quad v_2 = \alpha\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ \frac{1}{\sqrt{2}}i\\ 1\end{pmatrix}, \alpha\in\mathbb{C}$$

$$\lambda_3 = \bar{\lambda_2}: \quad (A-\bar{\lambda_2}I)v_3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad v_3 = \bar{v_2} = \beta\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ 1\end{pmatrix}, \beta\in\mathbb{C}$$

Die auf Diagonalgestalt transformierende Matrix lautet:

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i & i\\ 1 & i & -i\\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

c) Da A reell ist, gilt $\bar{A} = A$. Damit folgt: $A\bar{v} = \bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$.

d) Wählt man oben $\alpha = \gamma = 1$, dann bildet $v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathrm{Re}(v_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Im}(v_2) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis.

Ordnen wir die Vektoren dieser Basis so an, dass v_1 der erste Basisvektor, $\mathrm{Im}(v_2)$ der zweite Basisvektor und $\mathrm{Re}(v_2)$ der dritte Basisvektor ist, dann lautet die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich dieser so angeordneten Orthonormalbasis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

e) Die Drehachse ist der reelle Eigenraum zum Eigenwert 1, also $\lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir haben in Teilaufgabe d) die Vektoren der dort ermittelten Orthonormalbasis in der Reihenfolge angeordnet, dass die Matrix, die diese Vektoren in genau dieser Reihenfolge als Spaltenvektoren hat, folgende Eigenschaften hat: der erste Spaltenvektor liegt auf der Drehachse und die Determinante dieser Matrix ist 1. Liegen diese Eigenschaften vor, dann hat die in d) erhaltene Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich dieser so angeordneten Basis die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei θ der Drehwinkel ist.
Also gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel θ muss somit sowohl gleich $\arcsin(\frac{2\sqrt{2}}{3})$ als auch gleich $\arccos(-\frac{1}{3})$ sein. Der Winkel, der diese beiden Identitäten erfüllt, ist $\approx 109,47°$.

Bemerkung: Hätte man in Teilaufgabe d) Real- und Imaginärteil des zu v_2 konjugiert-komplexen Eigenvektors v_3 genommen und hätte die Vektoren der aus v_1, $\mathrm{Re}(v_3)$ und $\mathrm{Im}(v_3)$ gewonnenen Orthonormalbasis in der Reihenfolge angeordnet, dass die Matrix, die diese Vektoren in genau dieser Reihenfolge als Spaltenvektoren hat, die Eigenschaften hat, dass der erste Spaltenvektor auf der Drehachse liegt und die Determinante dieser Matrix 1 ist (im Beispiel dieser Aufgabe hätte das bedeutet, dass $\mathrm{Re}(v_3)$ der zweite und $\mathrm{Im}(v_3)$ der dritte Basisvektor sein müsste), dann wäre die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich dieser so angeordneten Basis die gleiche wie die in d) erhaltene, anhand der man den Drehwinkel erkennen kann.

Blatt 3 (Tutorien)

Aufgabe 3.4

a)

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-2-\lambda) + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)(-2-\lambda)+2)] = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda+1) = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 0: \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_0 = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_3 = -1: \quad (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_{-1} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1. Die Dimension jedes Eigenraums ist auch 1, die geometrische Vielfachheit ist somit bei jedem Eigenwert gleich der algebraischen Vielfachheit. Die Matrix ist diagonalisierbar. Eine auf Diagonalgestalt transformierende Matrix lautet:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix $\mathbf{B}$ ist reell und symmetrisch und somit diagonalisierbar. Die Transformationsmatrix bei der Diagonalisierung kann sogar orthogonal gewählt werden.

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((3-\lambda)^2-4) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) = (5-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$

$$\lambda = 1: \quad (\mathbf{B}-\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 5: \ (\mathbf{B}-5\mathbf{I})\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_5 = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v}_5 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Es ist dim $E_1 = g(1) = 1 = a(1)$ und dim $E_5 = g(5) = 2 = a(5)$. Eine auf Diagonalgestalt transformierende Matrix lautet:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix B symmetrisch ist, sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bereits orthogonal. Der Eigenvektor in der dritten Spalte von S wurde bereits so gewählt, dass er orthogonal zum zweiten Spaltenvektor (Eigenvektor zum selben Eigenwert) ist (anderenfalls hätte man ihn durch durch das Kreuzprodukt der beiden ersten Spaltenvektoren ersetzen oder mittels des Gram-Schmidt Verfahrens orthonormieren müssen). Um eine orthogonale Transformationsmatrix zu erhalten, müsste man die Eigenvektoren in den Spalten von S nur noch auf Länge 1 normieren.

c)

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{C}}(\lambda) \quad &= \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{S_2 \to S_2 + S_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{Z_2 \to Z_2 - Z_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \\ -2 & 1-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{E.S_2}{=} -(1-\lambda)(-\lambda^2+1) \\
&= \quad -(1-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0
\end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

$$\lambda = 1: \quad (\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Es ist dim $E_1 = g(1) = 2 = a(1)$. Für den Eigenraum E_1 (zum Eigenwert 1) können somit 2 linear unabhängige Eigenvektoren ausgewählt werden. Der Eigenraum hat somit maximale Dimension.

$$\lambda = -1: \quad (\mathbf{C} + \mathbf{I})\mathbf{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_{-1} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R}$$

Es ist dim $E_{-1} = g(-1) = 1 = a(-1)$.
Die Matrix ist diagonalisierbar. Es gibt somit eine Basis von Eigenvektoren und die Matrix $\mathbf{C}$ kann auf Diagonalgestalt transformiert werden mittels der Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.5

Die reelle Matrix A_α ist symmetrisch; folglich gibt es (für jedes α) eine orthogonale Matrix P, so dass $P^T A_\alpha P$ Diagonalgestalt hat. Wir wissen zudem: Bei jedem derartigen P stehen in der Diagonale von $P^T A_\alpha P$ die Eigenwerte von A. Die Frage lautet also: Für welche α besitzt A_α die Eigenwerte 1, 2 und 3? Die Matrix

$$A_\alpha - E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist (unabhängig von α) singulär; somit ist 1 stets Eigenwert von A_α. Wegen

$$A_\alpha - 2E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -3+\alpha \end{pmatrix}$$

ist auch 2 stets Eigenwert. Schließlich haben wir noch

$$A_\alpha - 3E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & -5+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist genau dann singulär, wenn die erste und dritte Zeile linear abhängig sind, wenn also $-5+\alpha = 1-\alpha$ gilt, d. h. $\alpha = 3$.

Nur für $\alpha = 3$ gibt es daher eine orthogonale Matrix P mit $P^T A_\alpha P = diag(1,2,3)$. Setzen wir $\alpha = 3$ in die Matrizen ein, die wir oben erhalten haben, so können wir ablesen: Der Eigenraum $E(1)$ ergibt sich aus $x_1 - x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, der Eigenraum $E(2)$ aus $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, und der Eigenraum $E(3)$ schließlich aus $x_1 + x_3 = 0$ und $x_2 = 0$. Die Spalten der Matrix P sind dann normierte Eigenvektoren zu den drei Eigenwerten:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.6

1.) Wir zeigen zunächst folgendes: Für Matrizen $S = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und $T = diag(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ gilt stets $ST = TS$. Es ist nämlich

$$ST = diag(\sigma_1\tau_1, \ldots, \sigma_n\tau_n) = diag(\tau_1\sigma_1, \ldots, \tau_n\sigma_n) = TS$$

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis: Da A, B simultan diagonalisierbar sind, existiert eine reguläre Matrix C, so dass $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Wie wir eben gesehen haben, ist dann

$$(C^{-1}AC)(C^{-1}BC) = (C^{-1}BC)(C^{-1}AC)\,, \qquad \text{also} \qquad C^{-1}ABC = C^{-1}BAC\,.$$

Multiplikation mit C von links und mit C^{-1} von rechts liefert die Gleichung $AB = BA$.

2.) Gemeint waren alle komplexen Eigenwerte! Dann müssen wir aber für alle Betrachtungen den $\mathbb{C}^n$ zu Grunde legen. Setzen wir aber A und B als symmetrisch voraus, dürfen wir uns weiterhin mit dem $\mathbb{R}^n$ als zu Grunde liegenden Vektorraum begnügen. Da alle Eigenwerte von A algebraische Vielfachheit 1 haben, besitzt die Matrix n verschiedene (komplexe) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wählen wir dazu Eigenvektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$, so sind diese linear unabhängig, und für $C := [\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n]$ (eine komplexe $(n \times n)$-Matrix) hat $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt. Dann ist

$$AB\vec{c}_j \overset{\text{Vor.}}{=} BA\vec{c}_j = B\lambda_j\vec{c}_j = \lambda_j B\vec{c}_j \qquad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

d. h. $B\vec{c}_j$ liegt im Eigenraum von A zum Eigenwert λ_j. Es gilt somit $B\vec{c}_j = \mu_j\vec{c}_j$ für ein gewisses μ_j. Das bedeutet: $\vec{c}_j$ ist ein Eigenvektor von B. Folglich sind $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ (linear unabhängige) Eigenvektoren von B, und hieraus folgt, dass $C^{-1}BC$ eine Diagonalmatrix ist.

Bemerkung: In der Quantenmechanik wird einer physikalischen Größe ϕ ein linearer Operator Φ auf einem Vektorraum (über $\mathbb{C}$) zugeordnet. Die Eigenwerte von Φ werden dabei als mögliche Messwerte von ϕ interpretiert. Oftmals ist Φ diagonalisierbar und hat lauter eindimensionale Eigenräume. Die *simultane Diagonalisierbarkeit* zweier linearer Operatoren Φ und Ψ wird dann folgendermaßen interpretiert: Die zugehörigen physikalischen Größen ϕ und ψ lassen sich *gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit* messen — diese aus der Sicht der klassischen Mechanik selbstverständliche Tatsache gilt nämlich (überraschenderweise!) nicht mehr im atomaren Bereich. Die von Heisenberg entdeckte Unschärferelation besagt, dass etwa für den Ort x und den Impuls p eines Teilchens die Messunschärfen Δx und Δp stets die Ungleichung

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar$$

erfüllen ($\hbar$, die *Plancksche Konstante*, ist eine sehr kleine physikalische Konstante). Die zugeordneten Operatoren X und P vertauschen also nicht! Wenn wir auf dem Ortsoperator $X =$ (Multiplikation mit x) $=: m_x$ schon bestehen wollen, dann müssen wir uns für den Impulsoperator P etwas Originelleres einfallen lassen... Wie wär's mit $P = \frac{d}{dx}$? Tatsächlich gilt hier $m_x \circ \frac{d}{dx} \neq \frac{d}{dx} \circ m_x$ (Testen wir dies doch an einfachen Funktionen $\neq 0$). Diese Operatoren leben auf Funktionenräumen, sagen wir auf $C^1(\mathbb{R})$. Dass dies eine physikalisch korrekte Antwort auf die Unschärferelation ist, folgt in den Quantenmechanikvorlesungen...