

Übungen

Aufgabe 4.1 Im Ursprung eines raumfesten Koordinatensystems K_1 liege während der Zeitspanne $\{t|t \in [0, \tau]\}$ der Schwerpunkt S eines starren Körpers K , welcher den Trägheitstensor T_α besitze. T_α habe zur Zeit $t = 0$ in K_1 die Darstellung

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + 2 & \alpha - 2 \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha + 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Angenommen, auf K wirken keine äußeren Kräfte. Rotiert K mit der (als Vektor dargestellten) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, dann hat er die kinetische Energie $E = \frac{1}{2} \langle \vec{\omega}, T_\alpha \vec{\omega} \rangle$ und den (als Vektor dargestellten) Drehimpuls $\vec{L} = T_\alpha \vec{\omega}$. Für das zur Drehachse (das ist hier diejenige Ursprungsgerade, die $\vec{\omega}$ als Richtungsvektor hat) gehörende Trägheitsmoment J von K gilt außerdem $E = \frac{1}{2} J |\vec{\omega}|^2$.

Man beachte, dass $\vec{\omega}$ zeitlich veränderlich sein kann.

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T_α und geben Sie ein orthonormales Koordinatensystem K_2 an, in dem der Trägheitstensor durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.
- Für welche α gibt es eine eindeutig bestimmte Drehachse, so dass E unter der Bedingung $|\vec{\omega}| = 1$ maximal / minimal wird? Welcher Zusammenhang besteht dabei zu den Eigenwerten von T_α ?
- Zeigen Sie, dass die Lösungen von $\langle \vec{x}, T_\alpha \vec{x} \rangle = 1$ einen Ellipsoid, den sogenannten Trägheitsellipsoid, beschreiben, und dass der Abstand der Schnittpunkte der Drehachse mit dem Trägheitsellipsoid von S gleich $J^{-1/2}$ beträgt.
- In K_1 sei $\vec{\omega}(t = 0) = (0, \frac{2-\alpha}{\alpha}, \frac{2+\alpha}{\alpha})^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{L}(0)$ in K_1 und K_2 .
- Da der Trägheitstensor nur von der Massenverteilung von K abhängt, rotiert er (und damit auch seine Eigenvektoren) mit K mit. Lässt man daher das Koordinatensystem K_2 mitrotieren, so erhält man ein körperfestes orthonormales Koordinatensystem K_3 . In K_3 erfüllt $\vec{L}$ – in K_1 eine Erhaltungsgröße – die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(t) = -\vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t).$$

Leiten Sie aus dieser Gleichung ein Differentialgleichungssystem für die Koordinaten von $\vec{\omega}$ in K_3 her und lösen Sie es für $t \in [0, \tau]$ mit der Anfangsbedingung, dass in K_1 $\vec{\omega}(0) = (0, \frac{2-\alpha}{\alpha}, \frac{2+\alpha}{\alpha})^T$ ist. Welche Koordinaten in K_3 hat $\vec{L}(t)$ für diese Lösung?

Zusatz: Beschreiben Sie anschaulich, welche Bewegung der Körper K in diesem Fall in K_1 macht.

Bemerkung: Die Definitionen der in dieser Aufgabe vorkommenden physikalischen Größen finden sich z.B. in Standardphysiklehrbüchern in Kapiteln zur Mechanik des starren Körpers oder bei wikipedia.

Aufgabe 4.2 Gegeben ist das folgende, reibungsfrei schwingende System. Es besteht aus zwei auf der x-Achse liegenden Massenpunkten M_1 und M_2 (M_1 liegt links von M_2) mit jeweils gleicher Masse $m > 0$, die mit einer Feder der Federkonstanten $c_2 > 0$ aneinander gekoppelt sind. M_1 ist außerdem durch eine weitere Feder der Federkonstanten $c_1 > 0$ an einer links von M_1 und senkrecht zur x-Achse liegenden Ebene befestigt, M_2 durch eine Feder der Federkonstanten c_1 an einer rechts von M_2 und senkrecht zur x-Achse liegenden Ebene.

Stellen Sie unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen s_1 und s_2 der beiden Massenpunkte um ihre Gleichgewichtslage auf und ermitteln Sie deren allgemeine Lösung.

Aufgabe 4.3 a) Bestimmen Sie die Lösung der Gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= 4x_2 - x_3\end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, 0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.4 a) Transformieren Sie die folgenden Quadriken in Hauptachsenlage. Bestimmen Sie die zugehörige Transformation, die Normalform und den Typ der Quadrik.

i) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{8} = 0$

ii) $-23x_1^2 + 25x_2^2 - 2x_3^2 + 72x_1x_3 - 30x_1 + 50x_2 - 40x_3 + 75 = 0$

b) Klassifizieren Sie die Quadrik $x^2 + y^2 + z^2 + 2axz = 1$ mit $a \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von a .

Aufgabe 4.5 Gegeben sei der Vektorraum Π_2 der Polynome bis zum Grad 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t)q(t) dt$$

und der Unterraum $W = \text{Spann}(1 + t^2)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $W^\perp$.

b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus der Basis

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = t, \quad p_3(t) = t^2$$

von Π_2 eine Orthonormalbasis für Π_2 .

Hörsaalübung am 16.5.06: Aufgaben 4.1, 4.2,

Tutorien in der Woche 15.–19.5.06: Aufgaben 4.3, 4.4, 4.5.