Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

a)

$$p_{T_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+2-\lambda & \alpha-2 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha+2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[(\alpha+2-\lambda)^2-(\alpha-2)^2\right]$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2-2(\alpha+2)\lambda+8\alpha) = (4-\lambda)^2(2\alpha-\lambda) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2\alpha$

1. Fall: $\alpha \neq 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4 : (T_\alpha - 4I)\, v_4 = 0 \Rightarrow v_4 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\lambda_3 = 2\alpha : (T_\alpha - 2\alpha I)\, v_{2\alpha} = 0 \Rightarrow v_{2\alpha} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

2. Fall: $\alpha = 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$: alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind Eigenvektoren

Seien $\hat{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\hat{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren eines Koordinatensystems K_2. Dann ist K_2 ein orthonormales Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

Bemerkung:

Die Koordinatenachsen von K_2 nennt man auch Hauptträgheitsachsen, die Eigenwerte nennt man auch Hauptträgheitsmomente.

4.1 b)

Sei $|\vec{w}| = 1$ und seien (y_1, y_2, y_3) die Koordinaten von $\vec{w}$ in K_2. Dann gilt

$$E = \frac{1}{2}(4y_1^2 + 4y_2^2 + 2d\,y_3^2) \quad \text{und} \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1.$$

Daher folgt:

1. Fall: $d > 2$

E ist maximal $\Leftrightarrow$ die Drehachse ist der (1-dimensionale) Eigenraum zu $\lambda_3 = 2d$

E ist minimal $\Leftrightarrow$ die Drehachse liegt im (2-dimensionalen) Eigenraum zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Das Maximum ist also eindeutig bestimmt, das Minimum nicht.

2. Fall: $0 < d < 2$

E ist maximal $\Leftrightarrow$ die Drehachse liegt im Eigenraum zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

E ist minimal $\Leftrightarrow$ die Drehachse ist der Eigenraum zu $\lambda_3 = 2d$

Das Minimum ist also eindeutig bestimmt, das Maximum nicht.

3. Fall: $d = 2$

E ist unabhängig von der Drehachse, es gibt also kein eindeutig bestimmtes Maximum bzw. Minimum.

Zusammenhang mit den Eigenwerten von T_d:
Ein eindeutig bestimmtes Maximum gibt es genau dann, wenn T_d einen größten EW mit algebraischer = geometrischer Vielfachheit 1 besitzt, und ein eindeutig bestimmtes Minimum genau dann, wenn T_d einen kleinsten EW mit alg. = geom. Vielfachheit 1 hat.

Bemerkung:

$\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$: K heißt (symmetrischer) prolater Kreisel

$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$: " " " oblater "

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: " " Kugelkreisel

c)

Da alle Eigenwerte von T_2 das gleiche Vorzeichen haben (hier > 0) ist nach § 51 (Skript) die Quadrik $\langle \vec{x}, T\vec{x} \rangle - 1 = 0$ ein Ellipsoid.

Sei in K_2 : $\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$, d.h. $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Dann ist $E = \frac{1}{2} (4\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2 + 2\alpha\gamma_3^2) |\vec{\omega}|^2$.

$\Rightarrow J = 4\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2 + 2\alpha\gamma_3^2$.

Sei P Schnittpunkt der Drehachse $\{ \mu \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}, \mu \in \mathbb{R} \}$ mit dem Trägheitsellipsoid. Dann gilt in K_2:

$\vec{OP} = \vec{SP} = \tilde{\mu} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ und $\tilde{\mu}^2 (4\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2 + 2\alpha\gamma_3^2) = 1$

$\Rightarrow \tilde{\mu}^2 = (4\gamma_1^2 + 4\gamma_2^2 + 2\alpha\gamma_3^2)^{-1} = J^{-1}$

$\Rightarrow |\vec{SP}| = |\tilde{\mu}| = J^{-1/2}$. $\square$

d)

In K_1 : $\vec{L} = T_2 \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

In K_2 : $\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4.1 e)

Sei in K_3: $\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}$. Dann ist in K_3:

$$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \omega_1(t) \\ \lambda_2 \omega_2(t) \\ \lambda_3 \omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{d}{dt}\omega_1(t) \\ \lambda_2 \frac{d}{dt}\omega_2(t) \\ \lambda_3 \frac{d}{dt}\omega_3(t) \end{pmatrix},$$

$$-\vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_2-\lambda_3)\,\omega_2(t)\,\omega_3(t) \\ (\lambda_3-\lambda_1)\,\omega_1(t)\,\omega_3(t) \\ (\lambda_1-\lambda_2)\,\omega_1(t)\,\omega_2(t) \end{pmatrix}.$$

Aus $\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = -\vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t)$ folgt daher

$$\frac{d}{dt}\omega_1(t) = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1}\,\omega_3(t)\,\omega_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_2(t) = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2}\,\omega_3(t)\,\omega_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_3(t) = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\,\omega_1(t)\,\omega_2(t)$$

Wegen $\lambda_1 = \lambda_2$ folgt $\frac{d}{dt}\omega_3(t) = 0$. Also ist $\omega_3(t) = \omega_3(0)$.
Außerdem folgt

$$\frac{d}{dt}\omega_1(t) = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1}\,\omega_3(0)\,\omega_2(t) = \left(\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1}\,\omega_3(0)\right)\omega_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_2(t) = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2}\,\omega_3(0)\,\omega_1(t) = \left(\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1}\,\omega_3(0)\right)\omega_1(t).$$

Mit $\Omega := \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1}\,\omega_3(0)$ erhalten wir also

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} y_1(t) \\ \frac{d}{dt} y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} =: B \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \quad \boxed{*}$$

$p_B(\lambda) = \tilde{\lambda}^2 + \Omega^2 = 0$

Eigenwerte: $\tilde{\lambda}_1 = i|\Omega|$, $\tilde{\lambda}_2 = \overline{\tilde{\lambda}_1}$

Zu λ_1 gehört zum Beispiel der Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} -i\frac{\Omega}{|\Omega|} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{i|\Omega|t} \begin{pmatrix} -i\frac{\Omega}{|\Omega|} \\ 1 \end{pmatrix}$ eine komplexwertige Lösung des obigen Dgl.-systems. Da der Realteil und der Imaginärteil zwei linear unabhängige reelle Lösungen von $\boxed{*}$ sind, hat $\boxed{*}$ die allgemeine reelle Lösung

$$\begin{pmatrix} (y_{allg.})_1(t) \\ (y_{allg.})_2(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{\Omega}{|\Omega|} \sin|\Omega|t \\ \cos|\Omega|t \end{pmatrix} + \tilde{b} \begin{pmatrix} -\frac{\Omega}{|\Omega|} \cos|\Omega|t \\ \sin|\Omega|t \end{pmatrix}; \; a, \tilde{b} \in \mathbb{R}$$

$$= a \begin{pmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{pmatrix} + \tilde{b} \frac{\Omega}{|\Omega|} \begin{pmatrix} -\cos\Omega t \\ \sin\Omega t \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\cos\Omega t \\ \sin\Omega t \end{pmatrix}; \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Nun zur Anfangsbedingung:

In K_1 ist $\vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2-d}{d} \\ \frac{2+d}{d} \end{pmatrix}$.

Zur Zeit $t = 0$ fällt das Koordinatensystem K_3 mit K_2 zusammen. Somit sind die Einheitsvektoren von K_3 zur Zeit $t = 0$ identisch mit den Einheitsvektoren von K_2, haben also in K_1 die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Infolgedessen hat $\vec{\omega}(0)$ in K_3 die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}\,\alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(0) \\ \gamma_2(0) \\ \gamma_3(0) \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen dieser Anfangswerte in die allgemeine Lösung und wegen $\Omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \gamma_3(0)$ $= \frac{4-2\alpha}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\alpha} = \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha)$ ist die gesuchte Lösung

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\sin \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha)t \\ -\sqrt{2}\,\cos \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha)t \\ 2\sqrt{2}\,\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{L}(t)$ gilt dann

$$\vec{L}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1\gamma_1(t) \\ \lambda_2\gamma_2(t) \\ \lambda_3\gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2}\,\sin \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha)t \\ -4\sqrt{2}\,\cos \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha)t \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4.1 Zusatz:

Die Lösungen für $\vec{\omega}(t)$ und $\vec{L}(t)$ in K_3 besagen:

In K_3 läuft $\vec{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{2}\, \alpha^{-1} (2-\alpha)$ auf dem Mantel eines Kegels um die y_3-Achse des Koordinatensystems K_3.

Dieser Kegel hat den Öffnungswinkel

$$\boxed{\gamma = \arctan \frac{\sqrt{y_1(0)^2 + y_2(0)^2}}{y_3(0)}} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\, \alpha^{-1}}$$

$$= \arctan \frac{\alpha}{2} .$$

Diesen Kegel nennt man Polkegel.

In K_3 läuft $\vec{L}$ mit der Winkelgeschwindigkeit Ω auf dem Mantel eines Kegels um die y_3-Achse.

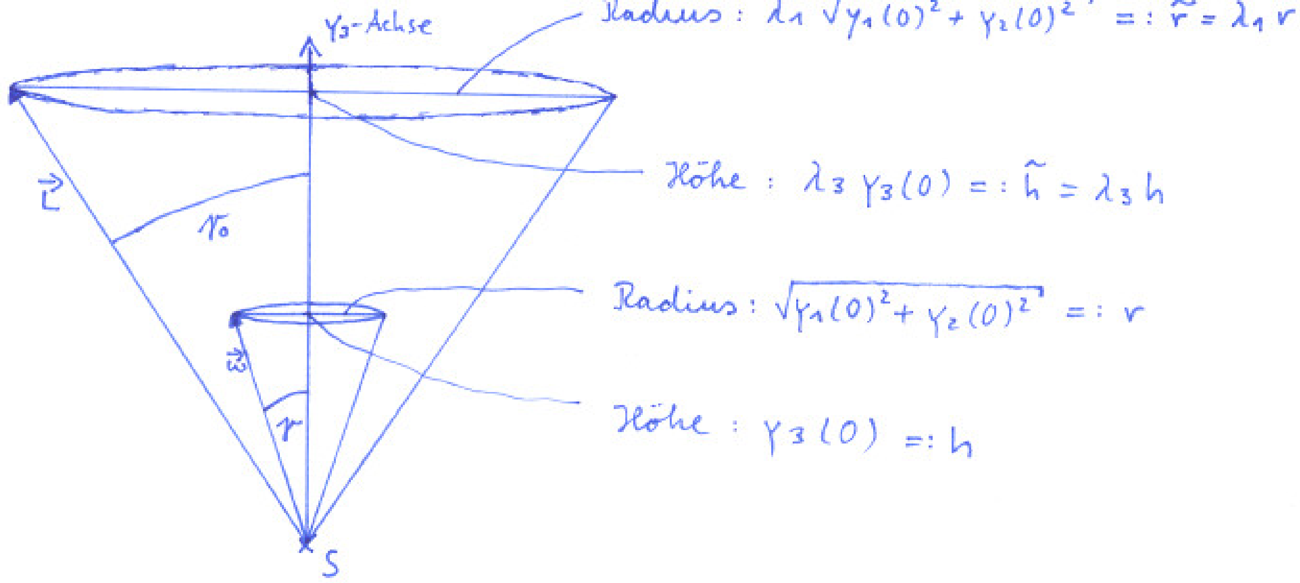
Dieser Kegel hat den Öffnungswinkel

$$\boxed{\gamma_0 = \arctan \frac{\lambda_1 \sqrt{y_1(0)^2 + y_2(0)^2}}{\lambda_3\, y_3(0)}} = \arctan \frac{4}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$= \arctan 1 = 45^\circ$$

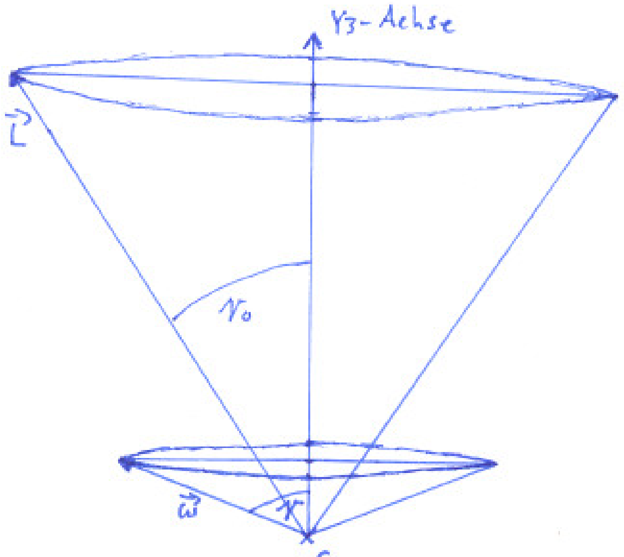
Für $\lambda_1 > \lambda_3$, also $0 < \alpha < 2$, liegt der Mantel dieses Kegels außerhalb des Polkegels, für $\lambda_1 < \lambda_3$, also $\alpha > 2$, innerhalb des Polkegels und für $\lambda_1 = \lambda_3$, also $\alpha = 2$ auf dem Polkegelmantel.

$\lambda_1 > \lambda_3$:



$\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ drehen sich im Uhrzeigersinn.

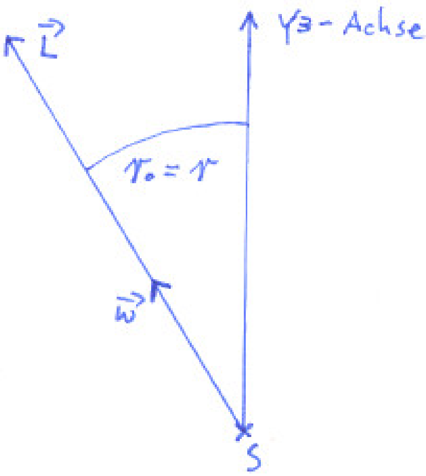
$\lambda_1 < \lambda_3$:



Formeln für Radien und Höhen wie oben

$\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ drehen sich gegen den Uhrzeigersinn.

$\lambda_1 = \lambda_3$:



Die Winkelgeschwindigkeit Ω ist 0, $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ ändern sich nicht mit der Zeit.

Wie sieht nun alles im raumfesten Koordinatensystem K_1 aus?

Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_3$:

Da $\vec{L}$ in K_1 eine Erhaltungsgröße ist, müssen in K_1 die Y_3-Achse aus K_3 und $\vec{L}$ die Rollen tauschen. Das bedeutet, dass in K_1 die körperfeste Y_3-Achse aus K_3 auf dem Mantel eines Kegels mit Öffnungswinkel γ_0 (von vorher) um den Drehimpulsvektor läuft. Wegen $\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ (siehe d)) in unserem Fall um die x_3-Achse von K_1.

Man nennt diesen Kegel Nutationskegel.

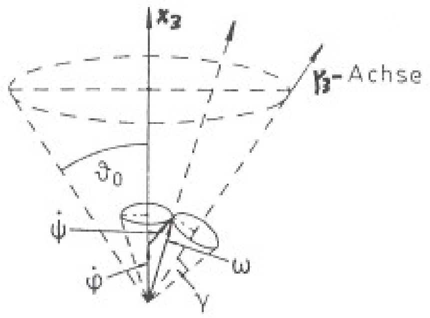
Da aber $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ nicht auf derselben Geraden liegen, dreht sich der Körper K gleichzeitig um die körperfeste Y_3-Achse (sie heißt auch Figurenachse), so dass die resultierende Winkelgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeiten addieren sich vektoriell) dann $\vec{\omega}$ ergibt.

Seien also $\dot{\varphi}$ bzw. $\dot{\psi}$ die jeweiligen Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich K um die Richtung von $\vec{L}$ bzw. um die Figurenachse dreht. Dann ergibt sich:

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist gleich der Vektorsumme aus $\dot{\vec{\varphi}}$ und $\dot{\vec{\psi}}$. Sie liegt immer in der X_3,Y_3-Ebene, rotiert also mit der Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses (X_3-Achse) und bildet mit der Figurenachse den Winkel γ. Die durch $\vec{\omega}$ definierte momentane Drehachse bewegt sich damit auf dem sogenannten Spurkegel um die raumfeste Drehimpulsrichtung.

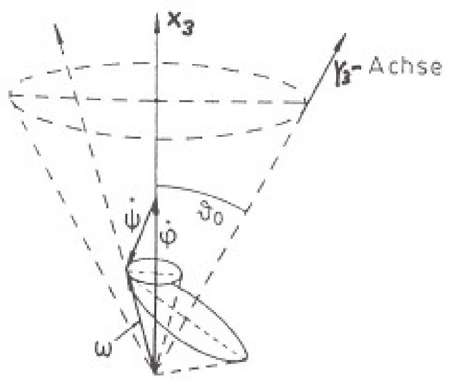
Der Polkegel rollt mit seinem *äußeren* Mantel auf dem raumfesten Spurkegel ab und führt damit die Figurenachsen auf dem Nutationskegel.

$\lambda_1 > \lambda_3$



Für $\lambda_1 > \lambda_3$ ist $\dot{\vec{\psi}} \uparrow\uparrow \vec{e}_{Y_3}$
Dann rollt die Außenfläche des Polkegels auf dem Mantel des Spurkegels ab.

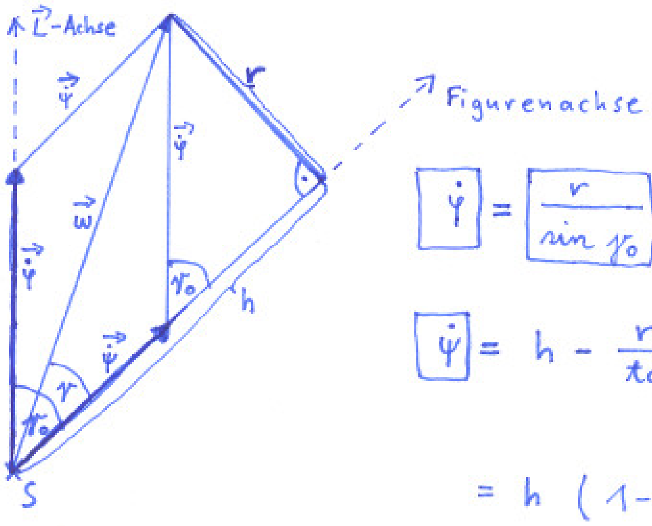
$\lambda_1 < \lambda_3$



Für $\lambda_1 < \lambda_3$ ist $\dot{\vec{\psi}} \uparrow\downarrow \vec{e}_{Y_3}$
Der Polkegel rollt mit der Innenfläche auf dem raumfesten Spurkegel ab, wobei wiederum die Figurenachse auf dem Nutationskegel geführt wird.

Welchen Wert hat $\dot\varphi$ bzw. $\dot\psi$?

$\underline{\lambda_1 > \lambda_3:}$



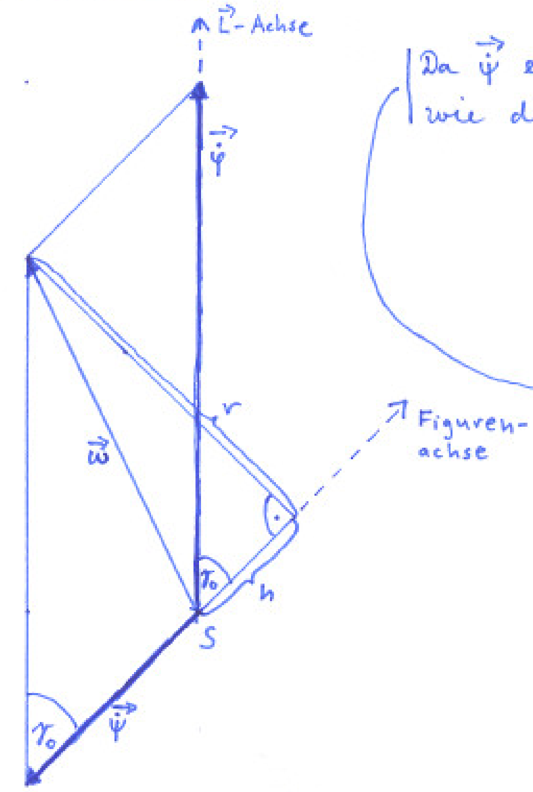
$$\boxed{\dot\varphi} = \boxed{\frac{r}{\sin\gamma_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2$$

$$\boxed{\dot\psi} = h - \frac{r}{\tan\gamma_0} = h - \frac{r}{\left(\frac{\lambda_1 r}{\lambda_3 h}\right)}$$

$$= h\left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) = \gamma_3(0)\,\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} = \boxed{\Omega}$$

$$= \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha) > 0$$

$\underline{\lambda_1 < \lambda_3:}$



Da $\vec{\dot\psi}$ entgegengesetzt gerichtet ist wie die Figurenachse.

$$\boxed{\dot\varphi} = \boxed{\frac{r}{\sin\gamma_0}} = 2$$

$$\boxed{\dot\psi} = -\left(\frac{r}{\tan\gamma_0} - h\right)$$

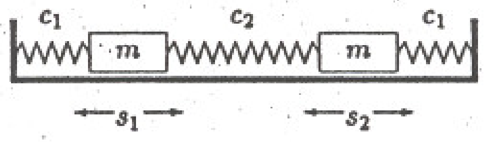
$$= -(-\Omega) = \boxed{\Omega}$$

$$= \sqrt{2}\,\alpha^{-1}(2-\alpha) < 0$$

Fall: $\lambda_1 = \lambda_3$:

$\vec{\omega}$ ist zeitlich unabhängig und zeigt in die Richtung von $\vec{L}$. Somit dreht sich der Körper K in diesem Fall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse, auf der $\vec{L}$ liegt.
In unserem Beispiel ist das die x_3-Achse von K_1, und $|\vec{\omega}|$ ist gleich 2.

Aufgabe 4.2



Die linke Feder wird um s_1, die rechte um s_2 ausgelenkt. Die Dehnung der mittleren Feder ist dann $s_2 - s_1$.

Bewegung der linken Masse
" rechten " (*)
$$\begin{cases} m\ddot{s}_1 = -(c_1+c_2)s_1 + c_2 s_2 \\ m\ddot{s}_2 = c_2 s_1 - (c_1+c_2)s_2 \end{cases}$$

Mit $A = \begin{pmatrix} -\frac{c_1+c_2}{m} & \frac{c_2}{m} \\ \frac{c_2}{m} & -\frac{c_1+c_2}{m} \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ lautet (*):

$$\underline{\ddot{\vec{s}}(t) = A\vec{s}(t).}$$

EW von A: $\underline{\lambda_1 = -\frac{c_1}{m},\ \lambda_2 = -\frac{c_1+2c_2}{m}}$. Die zugehörigen Eigenräume sind: $\underline{E_{\lambda_1} = \{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha\in\mathbb{R}\},\ E_{\lambda_2} = \{\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \beta\in\mathbb{R}\}}$

Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Setze $\vec{\tilde{s}} := S^{-1}\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(s_1+s_2) \\ \frac{1}{2}(s_1-s_2) \end{pmatrix} \longrightarrow \ddot{\vec{\tilde{s}}} = D\vec{\tilde{s}}$

$$\ddot{\tilde{s}}_1 = -\frac{c_1}{m}\tilde{s}_1,\quad \ddot{\tilde{s}}_2 = -\frac{c_1+2c_2}{m}\tilde{s}_2$$

A, B, C, D konst $\longrightarrow$ $$\underline{\vec{\tilde{s}}(t) = \begin{pmatrix} A\cos\left(\sqrt{\frac{c_1}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{m}}\,t\right) \\ C\cos\left(\sqrt{\frac{c_1+2c_2}{m}}\,t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{c_1+2c_2}{m}}\,t\right) \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow \underline{\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}} = S\vec{\tilde{s}}(t) = \underline{\begin{pmatrix} \tilde{s}_1(t) + \tilde{s}_2(t) \\ \tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4.3 a)

Schreibe die Differentialgleichung als

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(A - \lambda E) = -(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ und wir erhalten als Eigenwerte $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Wir haben zu den Gleichungssystemen $(A - \lambda_i E)v_i = 0, i = 1, 2, 3$ eine Lösung zu finden. Z. B. erhalten wir folgende Eigenvektoren:

zum Eigenwert -1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zum Eigenwert 3: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

zum Eigenwert -3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Es ist $\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0$. Wir machen die Substitution $x = Vy \Longrightarrow \dot{x} = V\dot{y}$. Daraus folgt $V\dot{y} = AVy, x_0 = Vy_0$. Somit $\dot{y} = V^{-1}AVy$ und $y_0 = V^{-1}x_0$. Wir setzen noch $\Lambda = V^{-1}AV$. Wir lösen jetzt $\dot{y} = \Lambda y, y(t_0) = y_0$. Wir bestimmen zunächst die Inverse von $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ z. B. mit Gauß zu $V^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 12 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Löse jetzt:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -3y_1, \\ \dot{y}_2 &= -y_2, \\ \dot{y}_3 &= 3y_3, \end{aligned}$$

mit $y_{01} = 0, y_{02} = 1, y_{03} = 0$.
Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{-3t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{-t} \\ y_3(t) &= c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$.

Also $y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $x(t) = Vy(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.3 b)

Sei $\mathbf{A}$ die gegebene Matrix. Da $\mathbf{A}$ zu einer Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ ähnlich ist gibt es eine Transformation $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, so daß
$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$ bzw. $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t))$. Es kann also zunächst das entkoppelte lineare Differentialgleichungssystem $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t)$ für $\mathbf{z} := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$ gelöst werden und wir erhalten somit $\mathbf{y}(t)$ durch $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}\mathbf{z}(t)$.
Diagonalisierung von A :

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-9)^2 = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$

2 linear unabhängige Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor zu $\lambda_3 = 0$: $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Transformationsmatrix: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten für unser Differentialgleichungsystem durch Diagonalisierung:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9z_1 \\ 9z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Lösung ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{9t} \\ C_2 e^{9t} \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{9t} \\ C_2 e^{9t} \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.4

a)

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{8}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$

Eigenvektoren, zum Beispiel: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koordinatenwechsel: $\mathbf{x} = \mathbf{Sy}$ mit Drehmatrix $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quadrik nach Hauptachsentransformation: $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1 - y_2 + y_3 + \frac{1}{8} = 0$

quadratische Ergänzung: $(y_1 + 1)^2 + 2(y_2 - \frac{1}{4})^2 + y_3 - 1 = 0$

Verschiebung: $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$ mit $\mathbf{p} = (1, -\frac{1}{4}, -1)^T$

Quadrik nach Verschiebung: $z_1^2 + 2z_2^2 + z_3 = 0 \Longrightarrow$ elliptisches Paraboloid

ii) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -23 & 0 & 36 \\ 0 & 25 & 0 \\ 36 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -40 \end{pmatrix}, \quad c = 75$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 25$, $\lambda_3 = -50$

Eigenvektoren, zum Beispiel: $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Zu beachten ist hier, daß im Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 25$ eine orthogonale Basis bestimmt wird. Dies geschieht entweder durch einen Orthogonalisierungsschritt nach Gram-Schmidt oder in diesem Spezialfall durch das Vektorprodukt: $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$.

Koordinatenwechsel: $\mathbf{x} = \mathbf{Sy}$ mit Drehmatrix $\mathbf{S} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Quadrik nach Hauptachsentransformation: $25y_1^2 + 25y_2^2 - 50y_3^2 + 50y_1 - 50y_2 + 75 = 0$

quadratische Ergänzung: $25(y_1 + 1)^2 + 25(y_2 - 1)^2 - 50y_3^2 + 25 = 0$

Verschiebung: $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$ mit $\mathbf{p} = (1, -1, 0)^T$

Quadrik nach Verschiebung: $z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ zweischaliges Hyperboloid

b) Die Quadrik sei dargestellt durch $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ mit $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$.

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad c = -1$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - a$, $\lambda_3 = 1 + a$

1) $|a| < 1 \Longrightarrow$ 3 positive Eigenwerte $\Longrightarrow$ Ellipsoid

2) $|a| > 1 \Longrightarrow$ 2 positive und 1 negativer Eigenwert $\Longrightarrow$ einschaliges Hyperboloid

3) $|a| = 1 \Longrightarrow$ 2 positive Eigenwerte und ein Eigenwert ist 0 $\Longrightarrow$ elliptischer Zylinder

Aufgabe 4.5

a) $p(t) := a + bt + ct^2 \in W^\perp$

$\Longrightarrow 0 =< p(t), t^2+1 >= \int\limits_0^1 (a+bt+ct^2)(t^2+1)\, dt = \frac{4}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{8}{15}c$. Diese Gleichung ist für $c = -\frac{5}{2}a - \frac{45}{32}b$ erfüllt. Damit ist

$$p(t) = a + bt + (-\frac{5}{2}a - \frac{45}{32}b)t^2 = a(1 - \frac{5}{2}t^2) + b(t - \frac{45}{32}t^2).$$

Also gilt $W^\perp = \text{Spann}(1 - \frac{5}{2}t^2, t - \frac{45}{32}t^2)$.

b) Gram-Schmidt-Orthonormalisierung:

$$\begin{aligned}
q_1 &:= \frac{p_1}{\|p_1\|} = 1, \\
\tilde{q}_2 &:= p_2 - < p_2, q_1 > q_1 = t - \int_0^1 t \cdot 1\, dt \cdot 1 = t - \frac{1}{2}, \\
q_2 &:= \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int\limits_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\, dt}} = \sqrt{3}(2t-1), \\
\tilde{q}_3 &:= p_3 - < p_3, q_1 > q_1 - < p_3, q_2 > q_2 \\
&:= t^2 - \int_0^1 t^2 \cdot 1\, dt \cdot 1 - \int_0^1 t^2 \sqrt{3}(2t-1)\, dt \cdot \sqrt{3}(2t-1) = \frac{1}{6} - t + t^2, \\
q_3 &:= \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{\frac{1}{6} - t + t^2}{\sqrt{\int\limits_0^1 (\frac{1}{6} - t + t^2)^2\, dt}} = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1).
\end{aligned}$$

Die Polynome $q_1 = 1, q_2 = \sqrt{3}(2t-1), q_3 = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$ bilden also bezüglich des gegebenen Skalarprodukts eine Orthonormalbasis von Π_2.