

Übungen

Aufgabe 5.1 Die Bewegung einer an beiden Enden eingespannten Saite der Länge L wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0,$$

wobei a eine positive Konstante ist, und $u = u(x, t)$ die Auslenkung senkrecht (in einer Ebene) zur Ruhelage zur Zeit t am Ort x beschreibt. Der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial t}$ bedeutet, dass die Variable x als konstant betrachtet wird und nach t abgeleitet wird. Entsprechendes gilt für $\frac{\partial u}{\partial x}$. $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ bzw. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ bedeutet die zweite Ableitung in obigem Sinne. Zur Gleichung hinzu kommen noch die Randbedingungen (Saite an den Enden eingespannt)

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

und die Anfangsbedingungen $u(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$ für $x \in (0, L)$, die besagen, dass zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung u_0 und die Geschwindigkeit v_0 der Saite vorgegeben wird.

1. Zeigen Sie, dass für eine Lösung der obigen Gleichung der Gestalt $u(x, t) = v(x)w(t)$ die beiden Funktionen $v(x)$ und $w(t)$ den beiden Differentialgleichungen

$$v'' + \lambda v = 0, \quad \ddot{w} + a^2 \lambda w = 0$$

mit einer gewissen Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ genügen.

2. Zeigen Sie: Lösen $v(x)$ und $w(t)$ die beiden Gleichungen aus a), so ist $u(x, t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Gleichung der schwingenden Saite.
3. Finden Sie alle λ , für die die Gleichung der schwingenden Saite unter den Randbedingungen eine nicht triviale Lösung der Form $v(x)w(t)$ besitzt.
4. Unter welchen hinreichenden Bedingungen ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(A_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\right)$$

eine Lösung der Saitengleichung mit den Randbedingungen?

5. Bestimmen Sie die A_n, B_n aus 4., wenn zusätzlich noch die obigen Anfangsbedingungen gelten, wobei speziell $v_0 = 0$ zu wählen ist.
6. Was ändert sich, wenn noch zusätzlich die Saite an der Stelle $x = \frac{L}{n}$ für festes $n \geq 2$ (mit einem Finger o.ä.) berührt wird?

Aufgabe 5.2 Gegeben sei die 2-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion f .
- b) Zeigen Sie mit Hilfe von a) die Identität $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 5.3 Die Funktionen f , g und h seien gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x & (-\pi < x \leq \pi), & & f(x+2\pi) &= f(x), \\ g(x) &= 1+x+|x| & (-2 < x \leq 2), & & g(x+4) &= g(x), \\ h(x) &= \cos\left(\frac{1}{2}x\right) & (-\pi < x \leq \pi), & & h(x+2\pi) &= h(x). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen.

Aufgabe 5.4 a) Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine (i) Cosinusreihe (ii) Sinusreihe.
Hinweis: Sie müssen f jeweils unterschiedlich fortsetzen.

b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Hörsaalübung am 23.5.06: Aufgaben 5.1, 5.2,

Tutorien in der Woche 22.–26.5.06: Aufgaben 5.3, 5.4.

Übungsklausuren Die 1. Übungsklausur zu HM II findet am Samstag, den 27.05.2006 von 9.00 bis 11.00 statt. **Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.**

Physiker mit Nachname von **A bis K** im HMU, von **L bis Z** im HMO,
Elektrotechniker und Geodäten im Gerthsen.