

Übungen

Aufgabe 6.1 Die Funktion g sei für $(x, y) \neq (0, 0)$ durch

$$g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

gegeben, und es sei $g(0, 0) := 0$. Zeigen Sie: Die Funktion g ist in $(0, 0)$ unstetig, aber g ist im Nullpunkt längs jeder Geraden stetig.

Aufgabe 6.2 a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D für die durch folgende Funktionswertzuweisung

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

definierten Funktionen und berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0).$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene für f und g aus a) im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

c) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_c für $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ der Funktionen:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = xy$$

Aufgabe 6.3 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Überprüfen Sie, dass f stetig ist.
2. Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f .
3. Sind $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0, 0)$ stetig?
4. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(0, 0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}}f(0, 0) = \text{grad}f(0, 0) \cdot \vec{v}$?
5. Überprüfen Sie f auf Differenzierbarkeit im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 6.4 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen erster Ordnung und den Gradienten.

a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$

c) $f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z)$

d) $f(x, y, z) = \frac{xe^y}{z} \quad (z \neq 0)$

Berechnen Sie in a), b) und d) auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Aufgabe 6.5 Berechnen Sie jeweils die Jakobimatrix.

a) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3e^{xy^2z^3} \\ x^2e^y + \sin x \end{pmatrix}$

b) $f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x + x \sinh y \\ y^4 + 3x^2 \sin y \\ 4y - x^3 \end{pmatrix}$

c) $f(x, y, z) = \arctan(xy) + e^z \cosh(x + y)$

d) $f(x, y, z) = x^y$

Hörsaalübung am 30.5.06: Aufgaben 6.1, 6.2, 6.3,
Tutorien in der Woche 29.5–2.6.06: Aufgaben 6.4, 6.5.