Blatt 6 (Hörsaalübung)

Aufgabe 6.1

Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Wählt man jedoch in Polarkoordinaten ein festes φ, so ist entweder $\cos\varphi = 0$, also $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$ für alle r, oder aber wir haben

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0\,.$$

Somit ist g im Nullpunkt längs jeder Geraden stetig.

Aufgabe 6.2

a) $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbb{R}\times\{0\}\}$, $\quad f_x = (x,y) = \frac{1}{y}$, $\quad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$,

$f_{xx}(x,y) = 0$, $\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$, $\quad f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$

$D_g = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $\quad g_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\quad g_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

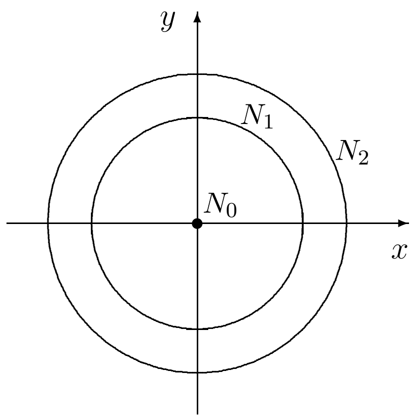
$g_{xx}(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$g_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

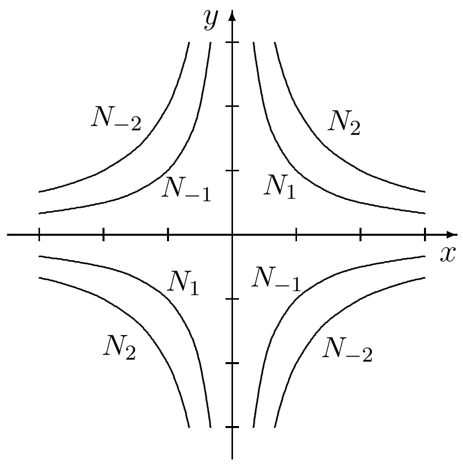
b) für $f : z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(y-2)$

für $g : z = \ln 5 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{4}{5}(y-2)$

c) Die Niveauline $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also $x^2 + y^2 = c$. Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge, für $c = 0$ nur den Nullpunkt und für $c > 0$ einen Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{c}$. N_0 ist also der Nullpunkt, N_1 der kleinere und N_2 der größere Kreis.



Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\{(x,y) : x = 0 \text{ oder } y = 0\}$. Für $c \neq 0$ erhalten wir den Graphen der Funktion $y = \frac{c}{x}$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln. Die Skizze sieht wie folgt aus, wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht.



Aufgabe 6.3

1.) Auch diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offenbar stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ und $z := \max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|y^3| + |x^2y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{z^3+z^3}{z^2} = 2z = 2\max\{|x|,|y|\},$$

und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

2.) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2) - (y^3-x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}^T$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 - 0}{0+h^2} = 1.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0 \quad 1).$$

3.) Betrachtet man

$$\begin{aligned} f_x(x,x) &= \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 0 = f_x(0,0)\,, \\ f_y(x,0) &= \frac{-x^4+0+0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 1 = f_y(0,0)\,, \end{aligned}$$

so sieht man: Weder f_x noch f_y ist im Punkt $(0,0)$ stetig.

4.) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}\,) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3 - h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$\operatorname{grad} f(0,0)\cdot \vec{v} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \quad \leftrightarrow \quad v_2^3 - v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \quad \leftrightarrow \quad 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

5.) Da nach dem Ergebnis von 4. die Gleichung $D_{\vec{v}} f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0)\cdot\vec{v}$ nicht für jede Richtung $\vec{v}$ gilt, also die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f$ in $(0,0)$ im allgemeinen nicht linear von der Richtung $\vec{v}$ abhängt, kann f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein.

Blatt 6 (Tutorien)

Aufgabe 6.4

a) partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad f_y(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\,3x^2 - 4xy^2 + 4y^3, \quad -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,)$$

partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 6x - 4y^2, & f_{xy}(x,y) &= -8xy + 12y^2 \\ f_{yx}(x,y) &= -8xy + 12y^2, & f_{yy}(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2 \end{aligned}$$

b) partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}, \\ f_y(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}. \end{aligned}$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\,(x^2y + 2x + y^3)e^{xy}, \quad (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,)$$

partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + 2x + y^3)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}, \\ f_{xy}(x,y) &= (x^2 + 3y^2)e^{xy} + (x^2y + 2x + y^3)xe^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= f_{yx}(x,y), \\ f_{yy}(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}. \end{aligned}$$

c) partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z), \\ f_y(x,y,z) &= xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z), \\ f_z(x,y,z) &= xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z). \end{aligned}$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\nabla f(x,y))^T = \begin{pmatrix} yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z) \\ xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z) \\ xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z) \end{pmatrix}^T$$

d) partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$f_x(x,y,z) = \frac{e^y}{z}, \quad f_y(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}, \quad f_z(x,y,z) = -\frac{xe^y}{z^2}.$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\ \frac{e^y}{z}, \quad \frac{xe^y}{z}, \quad -\frac{xe^y}{z^2}\ )$$

partielle Ableitung zweiter Ordnung:

$$f_{xx}(x,y,z) = 0, \quad f_{yy}(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}, \quad f_{zz}(x,y,z) = \frac{2xe^y}{z^3}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y,z) &= \frac{e^y}{z} = f_{yx}(x,y,z), \quad f_{xz}(x,y,z) = -\frac{e^y}{z^2} = f_{zx}(x,y,z), \\ f_{yz}(x,y,z) &= -\frac{xe^y}{z^2} = f_{zy}(x,y,z). \end{aligned}$$

Aufgabe 6.5

a) $\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) = y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}$; ebenso berechnet man die anderen Ableitungen. Die Jakobimatrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Jf(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 & \frac{\partial}{\partial y} f_1 & \frac{\partial}{\partial z} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 & \frac{\partial}{\partial y} f_2 & \frac{\partial}{\partial z} f_2 \end{pmatrix} (x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Diesmal haben wir $Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Und hier erhalten wir die $(1,3)$-Matrix

$$Jf(x,y,z) = \left(\frac{y}{1+(xy)^2} + e^z \sinh(x+y) \quad \frac{x}{1+(xy)^2} + e^z \sinh(x+y) \quad e^z \cosh(xy) \right).$$

d) Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ ergibt sich $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \end{pmatrix}.$$