

Übungen

Aufgabe 7.1 Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei in (x_0, y_0) differenzierbar, und für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelte

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = -1 \quad \text{bzw.} \quad D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = 2.$$

1. Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0) sowie $D_{\vec{w}}f(x_0, y_0)$ für $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Bestimmen Sie die Richtung $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{h}| = 1$, für die $D_{\vec{h}}f(x_0, y_0)$ maximal wird.
3. Für welche Richtungen $\vec{g} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{g}| = 1$ gilt $D_{\vec{g}}f(x_0, y_0) = 0$?
4. Welche Bedeutung haben die in 2. und 3. bestimmten Richtungen?
5. Auf der durch die Funktion f beschriebenen Fläche liege im Punkt $f(x_0, y_0)$ eine Kugel. In welche Richtung rollt sie?

Aufgabe 7.2 Es sei das Vektorfeld F durch

$$F(x, y, z) = (xyf(z) + \sin x \quad zg(x) + \cos y \quad x^2h(y) + e^z)^T$$

gegeben. Bestimmen Sie die Funktionen $g(x)$, $h(y)$ und $f(z)$ so, dass $\text{rot } F = 0$ und $f(1) = 2$ ist.

Aufgabe 7.3 Gegeben sei eine quadratische Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten (d.h. alle Eigenwerte > 0) Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- a) Zeigen Sie: $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$.
- b) Wir bezeichnen $\mathbf{s}$ als eine Abstiegsrichtung von f im Punkt $\mathbf{x}$, falls für $\mathbf{s}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} < 0$ erfüllt ist. Berechnen Sie $\phi'(\alpha)$ für die Funktion $\phi(\alpha) := f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{s})$. Zeigen Sie, dass $\phi(\alpha)$ ein eindeutig bestimmtes Minimum besitzt in

$$\alpha^* = -\frac{\mathbf{s}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})}{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s}}.$$

- c) Zeigen Sie, dass das Verfahren des steilsten Abstiegs auf folgende Rekursion führt:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{A} \mathbf{g}_k} \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{g}_k := \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}.$$

Aufgabe 7.4 Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x, y) = 2 \ln \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

im Punkt $P = (-1, 2)$ und in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5} (3 \ 4)^T$.

Aufgabe 7.5 a) Für die folgenden Vektorfelder $\mathbf{U}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T$ sind jeweils Quelldichte $\operatorname{div} \mathbf{U}$ und Wirbelstärke $\operatorname{rot} \mathbf{U}$ zu berechnen.

i) $u(x, y, z) = \sin(x + y + z), \quad v(x, y, z) = \cos(x + y + z), \quad w(x, y, z) = 0,$

ii) $u(x, y, z) = y^2 + z^2, \quad v(x, y, z) = x^2 + z^2, \quad w(x, y, z) = x^2 + y^2,$

iii) $u(x, y, z) = \frac{1}{x}, \quad v(x, y, z) = \frac{1}{y}, \quad w(x, y, z) = \frac{1}{z},$

iv) $u(x, y, z) = 1, \quad v(x, y, z) = 1, \quad w(x, y, z) = 1,$

v) $u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} x, \quad v(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} y, \quad w(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} z.$

b) Zeigen Sie: Sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g.$$

Aufgabe 7.6 a) Zeigen Sie, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ ($k > 0$) für eine Ortsvariable von der Funktion

$$u(x, t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$

gelöst wird.

b) Zeigen Sie, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ die Funktion

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$$

die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Hörsaalübung am 6.6.06: Aufgaben 7.1, 7.2, 7.3,

Tutorien in der Woche 6.–9.6.06: Aufgaben 7.4, 7.5, 7.6.