## Blatt 7 (Hörsaalübung)

### Aufgabe 7.1

**1.)** Da $f$ in $(x_0, y_0)$ differenzierbar ist, gilt für jede Richtung $v$:

$$D_v f(x_0, y_0) = grad\, f(x_0, y_0)\, v\,,$$

also

$$\begin{aligned} -1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Es hat die eindeutige Lösung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{5}{3}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1}{3}.$$

Daher ist

$$grad\, f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_w f(x_0, y_0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}\,.$$

Zusatz: Berechnung von $D_w f(x_0, y_0)$ ohne Berechnung des Gradienten:
$w$ als Linearkombination von $u$ und $v$: $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt auf das LGS $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ mit der eindeutigen Lösung $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
Es folgt: $D_w f(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{3} D_u - \frac{1}{3} D_v\right) f(x_0, y_0) = -\frac{4}{3}$.

**2.)** Die Richtung des steilsten Anstiegs ist die Gradientenrichtung: $\vec{h} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**3.)** Es handelt sich um die Richtungen längs Höhenlinien, d.h. orthogonal zu grad $f(x_0, y_0)$: $\vec{g} = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**4.)** $\vec{g}$ ist die Richtung der Tangente an die Niveaulinie $f(x, y) = c$ mit $c = f(x_0, y_0)$.
$\vec{h}$ ist die Richtung der größten Steigung im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ auf der Fläche $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$.

**5.)** Die Kugel rollt in die negative Gradientenrichtung $\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

## Aufgabe 7.2

Seien $x, y, z \neq 0$.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 h'(y) - g(x) \\ xyf'(z) - 2xh(y) \\ zg'(x) - xf(z) \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} h'(y) = \frac{g(x)}{x^2} & = & a_1 \\ f'(z) = \frac{2h(y)}{y} & = & b_1 \\ \frac{g'(x)}{x} = \frac{f(z)}{z} & = & c_1 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} h(y) & = & a_1 y + a_2 \\ f(z) & = & b_1 z + b_2 \\ g(x) & = & \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g(x) & = & a_1 x^2 \\ h(y) & = & \frac{b_1}{2} y \\ f(z) & = & c_1 z \end{array} \quad \overset{\text{Koeff.Vgl.}}{\leftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} a_1 = \frac{c_1}{2}, & c_2 = 0 \\ a_1 = \frac{b_1}{2}, & a_2 = 0 \\ b_1 = c_1, & b_2 = 0 \end{array}$$

$$\overset{f(1)=2 \Leftrightarrow c_1=2}{\leftrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} f(z) & = & 2z \\ g(x) & = & x^2 \\ h(y) & = & y \end{array}$$

Da $f, g, h$ differenzierbar sein sollen, gelten ihre Vorschriften jeweils auf ganz $\mathbb{R}$.

## Aufgabe 7.3

**a)** $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

$\Longrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\big( \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \big) - b_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$

**b)** $\phi(\alpha) = f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{s}) \quad \Longrightarrow \quad \phi'(\alpha) = \nabla f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{s})^T\mathbf{s} = \alpha(\mathbf{s}^T\mathbf{A}\mathbf{s}) + \mathbf{s}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$

$\phi'$ ist eine affin lineare Funktion mit positiven höchsten Koeffizienten $\mathbf{s}^T\mathbf{A}\mathbf{s} > 0$. Also ist $\phi(\alpha)$ eine nach oben geöffnete Parabel und besitzt daher ein eindeutig bestimmtes Minimum in $\alpha^*$ mit $\phi'(\alpha^*) = 0$.

$$\Longrightarrow \alpha^* = -\frac{\mathbf{s}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})}{\mathbf{s}^T\mathbf{A}\mathbf{s}}.$$

**c)** Setze: $\mathbf{s} := -\nabla f(\mathbf{x}) = -(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) := -\mathbf{g}$ und gehe von $x$ zur Minimumsstelle von $f$ längs der Geraden durch $x$ mit Richtung $s$ ( siehe Teilaufgabe **b)**):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k^* \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{s}_k^T(\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b})}{\mathbf{s}_k^T\mathbf{A}\mathbf{s}_k}\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{g}_k^T\mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_k^T\mathbf{A}\mathbf{g}_k}\mathbf{g}_k\,.$$

Zur Illustration noch ein konkretes Beispiel:

Sei $f(x, y) = x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Die zugehörige Matrix $\mathbf{A}$ besitzt die positiven Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ und ist somit positiv definit. Die Funktion $f$ besitzt also ein Minimum und zwar im Punkt $(0, 0)$.
Die Höhenlinien von $f$ sind konzentrische Ellipsen um den Punkt $(0, 0)$.

Durchführung von zwei Schritten des Gradientenverfahrens, ausgehend vom Startpunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$:
$\mathbf{g}^T = \text{grad } f(x,y) = (2x, 4y)$, $\quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{g}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, wobei die Bedingung für den Abstieg im Punkt $x$ in Richtung $\mathbf{s}$ durch

$\mathbf{s} := -\nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}\mathbf{x} := -\mathbf{g}$ bereits berücksichtigt ist.

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{g}_0^T\mathbf{g}_0}{\mathbf{g}_0^T\mathbf{A}\mathbf{g}_0}\mathbf{g}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{20}{72}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,444444 \\ -0,111111 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{g}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{g}_1^T\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_1^T\mathbf{A}\mathbf{g}_1}\mathbf{g}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{80}{192}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} \\ \frac{2}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,074074 \\ 0,074074 \end{pmatrix}$$

## Blatt 7 (Tutorien)

### Aufgabe 7.4

Es ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$, es existieren also in einer Umgebung von $P = (-1, 2)$ alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $f$, und sie sind dort stetig. Somit ist $f$ in $P$ differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$f'(-1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) \end{pmatrix} = (-1 \quad 1)\,.$$

Die Ableitung in Richtung des Vektors $v$ ist daher

$$D_v f(-1,2) = (\nabla f(-1,2))^T v = (-1 \quad 1)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\,.$$

### Aufgabe 7.5

**a)**

i) div $\mathbf{U} = u_x + v_y + w_z = \cos(x+y+z) - \sin(x+y+z)$,
rot $\mathbf{U} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)^T$
$= (\sin(x+y+z), \cos(x+y+z), -\sin(x+y+z) - \cos(x+y+z))^T$,

ii) div $\mathbf{U} = 0$,  rot $\mathbf{U} = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$,

iii) div $\mathbf{U} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}$,  rot $\mathbf{U} = 0$,

iv) div $\mathbf{U} = 0$,  rot $\mathbf{U} = 0$

v) Wegen $U = \varphi f$ mit

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \nabla \times (\varphi f) = \varphi(\nabla \times f) + (\nabla\varphi) \times f$.
Offenbar ist $\nabla \times f = 0$ und $\varphi_x(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla\varphi(x,y,z) = \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla\varphi) \times f = 0\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot} U = 0$.
Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \nabla \cdot (\varphi f) &= \varphi(\nabla \cdot f) + (\nabla\varphi) \cdot f \\ &= 3\varphi + \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,. \end{aligned}$$

**b)** Wir verwenden die Darstellung $\Delta = \nabla^T\nabla = \nabla \cdot \nabla$ des Laplaceoperators. Aus $\partial_{x_k}(fg) = (\partial_{x_k} f)g + f(\partial_{x_k} g)$ folgt $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$. Damit ergibt sich

$$\Delta(fg) = \nabla \cdot \big(\nabla(fg)\big) = \nabla \cdot \big((\nabla f)g + f(\nabla g)\big) = \nabla \cdot \big(g(\nabla f)\big) + \nabla \cdot \big(f(\nabla g)\big)\,;$$

auf beide Summanden wenden wir nun die Produktregel für die Divergenz an (Beachte: $f$ und $g$ sind skalarwertig, $\nabla f$ und $\nabla g$ sind vektorwertig) und erhalten

$$\begin{aligned} &= g\big(\nabla \cdot (\nabla f)\big) + (\nabla g) \cdot (\nabla f) + f\big(\nabla \cdot (\nabla g)\big) + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \\ &= g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\,. \end{aligned}$$

## Aufgabe 7.6

**a)** $u(x,t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}} \implies u_t(x,t) = -e^{-t} \frac{\sin x}{\sqrt{k}},\;\; u_{xx}(x,t) = -\frac{1}{k} e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$

$\implies \Delta u - \frac{1}{k} u_t = u_{xx} - \frac{1}{k} u_t = 0$

**b)** $u(r,t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct) \implies u_{tt}(r,t) = -\frac{c^2}{r} \sin(r - ct)$

$u_r(r,t) = -\frac{1}{r^2} \sin(r - ct) + \frac{1}{r} \cos(r - ct), \quad u_{rr}(r,t) = \frac{2}{r^3} \sin(r - ct) - \frac{2}{r^2} \cos(r - ct) - \frac{1}{r} \sin(r - ct)$

$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$