

Übungen

Aufgabe 8.1 Die Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\psi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z \quad , \quad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x, y) = \psi(\varphi(x^3 - 2y^2, 2x + y))$.

- Bestimmen Sie $f(1, 1)$.
- Berechnen Sie $\text{grad } f(1, 1)$ mit Hilfe der Kettenregel.
- Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = f(x, y)$ definierte Fläche im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$.

Aufgabe 8.2 a) Gegeben seien die Zylinderkoordinaten $\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi & z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J\Phi$ und leiten Sie die folgende Darstellung des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten elementar unter Verwendung der Kettenregel her:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- Gegeben seien zwei ineinanderliegende Zylinder, die beide rotationssymmetrisch zur z-Achse seien. Der eine Zylinder habe den Durchmesser $\frac{1}{2}$, der andere den Durchmesser 2.

Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung u , d.h. die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung mit $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, zwischen diesen zwei Zylindern für den Fall, dass die Temperatur auf dem Mantel des inneren Zylinders konstant bei 0 und die Temperatur auf dem Mantel des äußeren Zylinders konstant bei 1 gehalten wird.

Hinweis: Aus Symmetriegründen hängt u in Zylinderkoordinaten nur vom Radius ab.

Aufgabe 8.3 a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$h(x, y) = x^y$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (1, 3)^T$ und berechnen Sie näherungsweise die Zahl $1,02^{3,01}$.

- Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von

$$g(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^3).$$

Aufgabe 8.4 Berechnen Sie für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfen Sie das Ergebnis durch direktes Ableiten.

a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$ mit $f_1(x, y) = xy$ und $f_2(t) = e^t$,

b) $g(x, y, z) = g_2(g_1(x, y, z))$ mit $g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$, $g_2(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ u + v \\ \sin(u + v) \end{pmatrix}$,

c) $k(t) : t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T$,

d) $h(u, v) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y$,

e) $p(u, v) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2y^2z \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8.5 Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9.$$

- a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades der Funktion f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
- b) Bestimmen Sie eine obere Schranke nach der Restgliedformel von Lagrange für den Abstand im Nullpunkt zwischen der Funktion und der Tangentialebene im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) und vergleichen Sie diese mit dem tatsächlichen Abstand.

Aufgabe 8.6 a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom $T_3(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \cos x \sin ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$

- i) unter Verwendung des Taylorschen Satzes,
- ii) mittels der Taylor-Reihen der verwendeten elementaren Funktionen in einer Dimension.
- b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihen von

$$g(x, y, z) = \frac{xyz^2}{1 - x^2z},$$

$$h(x, y) = \arctan(x^2 + 4xy - y^5).$$

Hörsaalübung am 13.6.06: Aufgaben 8.1, 8.2, 8.3,

Tutorien in der Woche 12.–16.6.06: Aufgaben 8.4, 8.5, 8.6.