Blatt 8 (Hörsaalübung)

Aufgabe 8.1

Mit $h(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 2y^2 \\ 2x+y \end{pmatrix}$ ist $f(x,y) = \psi(\varphi(h(x,y)))$.

a) $f(1,1) = \psi(\varphi(h(1,1))) = \psi(\varphi(-1,3))$

$= \psi(7,-3,8) = -41$

b) $f'(1,1) = \psi'(\varphi(h(1,1)))\,\varphi'(h(1,1))\,h'(1,1)$

$= \psi'(7,-3,8)\,\varphi'(-1,3)\,h'(1,1)$

$$= (-2x, -2y, 2)\Big|_{(7,-3,8)} \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(-1,3)} \begin{pmatrix} 3x^2 & -4y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)}$$

$$= (-14, 6, 2) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$= (106, -222) = \operatorname{grad} f(1,1)$

c) $z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

$= -41 + 106(x-1) - 222(y-1)$

bzw.

$-106x + 222y + z - 75 = 0$

Aufgabe 8.2

a)

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Summanden der Darstellung von Δ in Zylinderkoordinaten erhält man wie bei der Herleitung der Darstellung von Δ in Polarkoordinaten (siehe Vorlesungsskript). Der dritte Summand ergibt sich wegen $\frac{\partial z}{\partial x_3} = 1$.

b)

u ist Lösung von

$$\left.\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u_t = 0 \end{cases}\right\}, \text{ also } \Delta u = 0$$

mit den Randbedingungen $u = 0$ für $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{4}$, $u = 1$ für $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$.

Aus Symmetriegründen hängt u in Zylinderkoordinaten nur vom Radius ab. Sei daher $w(r) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z, t)$. Aufgrund der Darstellungsformel für Δ in Zylinderkoordinaten muss gelten

$$\begin{cases} w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) = 0 \\ w(\frac{1}{4}) = 0 \\ w(1) = 1 \end{cases}$$

$\to w'(r) = A\frac{1}{r}$; $A \in \mathbb{R}$ $\to$ $w(r) = A \ln r + B$; $A, B \in \mathbb{R}$

$w(1) = 1 \to B = 1$; $w(\frac{1}{4}) = 0 \to A = \frac{1}{\ln 4}$

Also $\boxed{u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\ln 4} + 1}$.

Aufgabe 8.3

a)

Sei $x > 0$. Dann ist

$$h(x,y) = x^y = e^{y \ln x} \Rightarrow h(1,3) = 1$$

$$h_x(x,y) = y\, x^{y-1} \Rightarrow h_x(1,3) = 3$$

$$h_y(x,y) = (\ln x)\, x^y \Rightarrow h_y(1,3) = 0$$

$$h_{xx}(x,y) = y(y-1)\, x^{y-2} \Rightarrow h_{xx}(1,3) = 6$$

$$h_{yy}(x,y) = (\ln x)^2\, x^y \Rightarrow h_{yy}(1,3) = 0$$

$$h_{xy}(x,y) = h_{yx}(x,y) = (1 + y \ln x)\, x^{y-1}$$

$$\Rightarrow h_{xy}(1,3) = h_{yx}(1,3) = 1$$

Also:

$$T_2(x,y;1,3) = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3)$$

$$1{,}02^{3{,}01} = h(1{,}02\,,\ 3{,}01) \approx T_2(1{,}02, 3{,}01; 1, 3) = 1{,}0614$$

b)

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^2 + y^3)^n$$

Blatt 8 (Tutorien)

Aufgabe 8.4

a) Kettenregel: grad $f(x,y) = \mathbf{J}(f_2 \circ f_1)(x,y) = \mathbf{J}f_2(f_1(x,y)) \cdot \mathbf{J}f_1(x,y)$

$= f_2'(f_1(x,y))\cdot$ grad $f_1(x,y) = e^{xy}(y,x)$

direkt: grad $f(x,y) =$ grad $e^{xy} = (ye^{xy}, xe^{xy}) = e^{xy}(y,x)$

b) Kettenregel: $\mathbf{Jg}(x,y,z) = \mathbf{J}(\mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_1)(x,y,z) = \mathbf{Jg}_2(\mathbf{g}_1(x,y,z)) \cdot \mathbf{Jg}_1(x,y,z)$

$$= \begin{pmatrix} y+z & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}$$

direkt: $\mathbf{Jg}(x,y,z) = \mathbf{J} \begin{pmatrix} xy+xz+y^2+yz \\ x+2y+z \\ \sin(x+2y+z) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}$$

c) direkt: $\mathbf{Jk}(t) = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^3 t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 3\sin^2 t \cos t \\ -2\cos t \sin t \end{pmatrix}$

Kettenregel: mit $\mathbf{k}_2(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^3 \\ y^2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{k}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ gilt

$\mathbf{Jk}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{k}_2 \circ \mathbf{k}_1)(t) = \mathbf{Jk}_2(\mathbf{k}_1(t)) \cdot \mathbf{Jk}_1(t)$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 3\sin^2 t & 0 \\ 0 & 2\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 3\sin^2 t \cos t \\ -2\cos t \sin t \end{pmatrix}$$

d) direkt: grad $h(u,v) =$ grad $(3uv(u+v)^2 + 2u^2v^2 - (u+v))$

$= (3v(u+v)^2 + 6uv(u+v) + 4uv^2 - 1,\ 3u(u+v)^2 + 6uv(u+v) + 4u^2v - 1)$

Kettenregel: mit $h_2(x,y) = 3xy^2 + 2x^2 - y$ und $\mathbf{h}_1(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u+v \end{pmatrix}$ gilt

grad $h(u,v) = \mathbf{J}(h_2 \circ \mathbf{h}_1)(u,v) = \mathbf{J}h_2(\mathbf{h}_1(u,v)) \cdot \mathbf{Jh}_1(u,v) =$ grad $h_2(\mathbf{h}_1(u,v)) \cdot \mathbf{Jh}_1(u,v)$

$$= (3(u+v)^2 + 4uv,\ 6uv(u+v) - 1) \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3v(u+v)^2 + 6uv(u+v) + 4uv^2 - 1,\ 3u(u+v)^2 + 6uv(u+v) + 4u^2v - 1)$$

e) direkt: $\mathbf{Jp}(u,v) = \mathbf{J} \begin{pmatrix} uv^2 \sin u \\ u^2v^7 \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2(\sin u + u\cos u) & 2uv \sin u \\ v^7(2u \sin u + u^2 \cos u) & 7u^2v^6 \sin u \end{pmatrix}$

Kettenregel: mit $\mathbf{p}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ x^2y^2z \end{pmatrix}$ und $\mathbf{p}_1(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ v^2 \\ v \sin u \end{pmatrix}$ gilt

$\mathbf{Jp}(u,v) = \mathbf{J}(\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{p}_1)(u,v) = \mathbf{Jp}_2(\mathbf{p}_1(u,v)) \cdot \mathbf{Jp}_1(u,v)$

$$= \begin{pmatrix} v \sin u & 0 & uv \\ 2uv^6 \sin u & 2u^2v^5 \sin u & u^2v^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 2v \\ v\cos u & \sin u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v^2(\sin u + u\cos u) & 2uv \sin u \\ v^7(2u \sin u + u^2 \cos u) & 7u^2v^6 \sin u \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.5

a)

$$\begin{array}{lllrcr}
f & = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9 & \Rightarrow & f(1,-1) & = & 1 \\
f_x & = 6x^2 - 10x + 3y + 9 & \Rightarrow & f_x(1,-1) & = & 2 \\
f_y & = 3x - 4y - 9 & \Rightarrow & f_y(1,-1) & = & -2 \\
f_{xx} & = 12x - 10 & \Rightarrow & f_{xx}(1,-1) & = & 2 \\
f_{xy} & = 3 & \Rightarrow & f_{xy}(1,-1) & = & 3 \\
f_{yy} & = -4 & \Rightarrow & f_{yy}(1,-1) & = & -4 \\
f_{xxx} & = 12 & \Rightarrow & f_{xxx}(1,-1) & = & 12 \\
f_{xxy} & = 0 & \Rightarrow & f_{xxy}(1,-1) & = & 0 \\
f_{xyy} & = 0 & \Rightarrow & f_{xyy}(1,-1) & = & 0 \\
f_{yyy} & = 0 & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow T_3(x,y;1,-1) = 1 + 2(x-1) - 2(y+1) + (x-1)^2 + 3(x-1)(y+1) - 2(y+1)^2 + 2(x-1)^3$

Es gilt sogar $f(x,y) = T_3(x,y;1,-1)$, da f Polynom 3. Grades ist.

b)

Mit der Tangentialebene $T_1(x,y;1,-1) = 1 + 2(x-1) - 2(y+1)$ ist der Fehler:

$$|f(0,0) - T_1(0,0;1,-1)| = |-9 - (1 + 2(0-1) - 2(0+1))| = 6\,.$$

Die Fehlerabschätzung nach der Restgliedformel von Lagrange mit
$x = (0,0)^T$, $x^0 = (1,-1)^T$ und $\xi = x^0 + \Theta(x - x^0) = (1-\Theta, -1+\Theta)^T$, wobei $\Theta \in [0,1]$ gilt, ergibt

$$\begin{array}{rcl}
|f(0,0) - T_1(0,0;1,-1)| & = & |R_1(0,0;1,-1)| \\
& = & \frac{1}{2}|f_{xx}(\xi)\cdot(0-1)^2 + 2f_{xy}(\xi)\cdot(0-1)(0+1) + f_{yy}(\xi)\cdot(0+1)^2| \\
& = & \frac{1}{2}|(12(1-\Theta) - 10)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot(-1) + (-4)\cdot 1| \\
& = & 2|2 + 3\Theta| \leq 10\,.
\end{array}$$

Aufgabe 8.6

a)

i)

$$\begin{array}{lllcl}
f & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0 \\
f_x & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0 \\
f_y & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 1 \\
f_{xx} & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xy} & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1 \\
f_{yy} & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & -2 \\
f_{xxx} & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xxy} & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = & 0 \\
f_{xyy} & = e^{x-y}(2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = & -2 \\
f_{yyy} & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = & 2
\end{array}$$

$$\Rightarrow \; T_3(x,y;0,0) = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{y^3}{3}$$

ii)

$$\begin{aligned}
& \cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} \mp \cdots, \; \sin y = y - \tfrac{y^3}{6} + \tfrac{y^5}{5!} \mp \cdots, \\
& e^{x-y} = 1 + (x-y) + \tfrac{(x-y)^2}{2} + \tfrac{(x-y)^3}{6} + \tfrac{(x-y)^4}{4!} + \cdots \\
\Rightarrow \; f(x,y) \quad & = \left(1 - \tfrac{x^2}{2} \pm \cdots\right)\left(y - \tfrac{y^3}{6} \pm \cdots\right)\left(1 + (x-y) + \tfrac{(x-y)^2}{2} + \tfrac{(x-y)^3}{6} + \cdots\right) \\
& = \left(y - \tfrac{y^3}{6} - \tfrac{x^2 y}{2} + \cdots\right)\left(1 + x - y + \tfrac{x^2}{2} - xy + \tfrac{y^2}{2} + \cdots\right) \\
& = y + xy - y^2 + \tfrac{x^2 y}{2} - xy^2 + \tfrac{y^3}{2} - \tfrac{y^3}{6} - \tfrac{x^2 y}{2} + \cdots \\
& = y + xy - y^2 - xy^2 + \tfrac{y^3}{3} + \text{ Terme höherer Ordnung}
\end{aligned}$$

b)

$$g(x,y,z) = \frac{xyz^2}{1-x^2 z} = xyz^2 \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 z)^n = y \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} z^{n+2} = y \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} z^{n+1},$$

$$h(x,y) = \arctan(x^2 + 4xy - y^5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^2 + 4xy - y^5)^{2n+1}.$$