

Übungen

Aufgabe 9.1 Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$.

- a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f .
- b) Versuchen Sie, die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.
- c) Zeigen Sie, daß f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.
- d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Aufgabe 9.2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x - 2.$$

- a) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Höhenlinie $f(x, y) = 0$?

$$(x_0, y_0) = (-1, 1), \quad (x_1, y_1) = \frac{1}{2}(-1, 1), \quad (x_2, y_2) = (-1, 0)$$

- b) Überprüfen Sie, ob sich die Höhenlinie $f(x, y) = 0$ in den Punkten aus a), die auf ihr liegen, durch eine C^1 -Funktion parametrisieren läßt und berechnen Sie gegebenenfalls den Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zwischen der Tangente der parametrisierten Höhenlinie in diesen Punkten und der x -Achse.
- c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ in Richtung des Einheitstangentenvektors an die Parametrisierung $(x, y(x))$ aus b) in (x_0, y_0) .

Aufgabe 9.3 Sei $u^2 - v = 3x + y$ und $u - 2v^2 = x - 2y$. Bestimmen Sie $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ als Funktion von u und v .

Aufgabe 9.4 a) Bestimmen Sie alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, so dass durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$$

in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion $z = g(x, y)$ definiert ist, deren Gradient in (x_0, y_0) verschwindet.

- b) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion g .
- c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von g in (x_0, y_0) .

Aufgabe 9.5 a) Ermitteln Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen. Handelt es sich jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt?

i) $f(x, y) = y^3 + x^2y - 3y$ ii) $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 4yz + 5z^2 - 4z + 4$

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $h(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$ auf der Menge $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 9.6 a) Beweisen Sie die lokale Auflösbarkeit von $x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ nach x in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (3, 1)$ und berechnen Sie $h'(1)$ und $h''(1)$ für die implizit definierte Funktion $x = h(y)$.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $x = h(y)$ an der Stelle $y = 1$.

c) Berechnen Sie explizit die Funktion $h(y)$ aus a), geben Sie deren maximalen Definitionsbereich an und bestätigen Sie die berechneten Ableitungswerte.

Aufgabe 9.7 Zeigen Sie, dass nahe $(x_0, y_0) = (0, 0)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u^2 + ve^{-u} + xu &= 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} &= x \end{aligned}$$

zwei Funktionen $u(x, y)$ sowie $v = v(x, y)$ eindeutig bestimmt sind. Berechnen sie u_x, u_y, v_x und v_y in $(0, 0)$.

Hörsaalübung am 20.6.06: Aufgaben 9.1, 9.2, 9.3, 9.4,

Tutorien in der Woche 19.–23.6.06: Aufgaben 9.5, 9.6, 9.7.