Blatt 9 (Hörsaalübung)

Aufgabe 9.1

a) grad $f(x,y) = (2x(24x^2-7y), -7x^2+2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 24x^2-7y = 0$. Aus $x = 0$ folgt sofort $y = 0$, und damit erhält man den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Aus $24x^2 - 7y = 0$ folgt $2y = \frac{48x^2}{7} \Rightarrow -7x^2 + \frac{48x^2}{7} = 0 \Rightarrow x = 0$. Einziger stationärer Punkt ist also $(0,0)$.

b) $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 144x^2 - 14y & -14x \\ -14x & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist (echt) positiv semidefinit, und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar. Die notwendige Bedingung lässt für den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

c) Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0,y) = y^2 .$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 12x^4 - 7ax^3 + a^2x^2$$

beschrieben. Man erhält

$$h'(x) = 48x^3 - 21ax^2 + 2a^2x \;\Rightarrow\; h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 144x^2 - 42ax + 2a^2 \;\Rightarrow\; h''(0) = 2a^2 > 0 .$$

Damit besitzt h für $x = 0$ ein striktes lokales Minimum.

d) Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$p(x) := f(x, ax^2) = 12x^4 - 7ax^4 + a^2x^4 = x^4(a^2 - 7a + 12) = x^4(a-3)(a-4) .$$

Damit erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} p'(x) & = & 4x^3(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p'(0) & = & 0 \\ p''(x) & = & 12x^2(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p''(0) & = & 0 \\ p'''(x) & = & 24x(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p'''(0) & = & 0 \\ p''''(x) & = & 24(a-3)(a-4) & \Rightarrow & p''''(0) & = & (a-3)(a-4) . \end{array}$$

Für $a \in [3,4]$ ist $p''''(0) < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor. Für $a \notin [3,4]$ ist $p''''(0) > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor.

Bei dem stationären Punkt $(0,0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 9.2

a) Es gilt $f(-1,1) = 0 = f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ und $f(-1,0) = 1$.
Damit liegen $(x_0,y_0) = (-1,1)$ und $(x_1,y_1) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ auf der Höhenlinie $f(x,y) = 0$.

b) $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 4y - 2, -3x^2 + 6xy - 3y^2 - 4x + 4y)$

$$\Longrightarrow \operatorname{grad} f(-1,1) = (2,-4) \text{ und } \operatorname{grad} f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (-3,1)$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich daher die Höhenlinie in (x_0,y_0) und auch in (x_1,y_1) sowohl nach x als auch nach y lokal durch eine C^1-Funktion parametrisieren.
Im Punkt $(x_0,y_0) = (-1,1)$ sei die Höhenlinie lokal nach x parametrisiert durch $g(x)$, d.h. es gilt $g(-1) = 1$ und $f(x,g(x)) = 0$ in entsprechenden Umgebungen um die Punkte $x_0 = -1$ und $y_0 = 1$. Gesucht ist der Winkel α_0 zwischen der Tangente von g im Punkt $x_0 = -1$ und der x-Achse, also

$$\tan\alpha_0 = g'(-1) = -\frac{f_x(-1,1)}{f_y(-1,1)} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha_0 = 0.46365 \doteq 26.565°.$$

Im Punkt $(x_1,y_1) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sei die Höhenlinie lokal nach x parametrisiert durch $h(x)$, d.h., es gilt $h(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ und $f(x,h(x)) = 0$ in entsprechenden Umgebungen um die Punkte $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $y_1 = -\frac{1}{2}$. Gesucht ist der Winkel α_1 zwischen der Tangente von h im Punkt $x_1 = -\frac{1}{2}$ und der x-Achse, also

$$\tan\alpha_1 = h'(-\frac{1}{2}) = -\frac{f_x(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{f_y(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = -\frac{-3}{1} = 3 \Longrightarrow \alpha_1 = 1.249 \doteq 71.565°.$$

c) Die gesuchte Richtungsableitung ist eine Ableitung längs einer Höhenlinie. Daher hat sie den Wert 0.

Aufgabe 9.3

$u(x,y) = x - 2y + 2v(x,y)^2 \implies \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 + 4v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$

$v(x,y) = u(x,y)^2 - 3x - y \implies \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - 3$

Einsetzen liefert:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 4v\frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 4v(2u\frac{\partial u}{\partial x} - 3) = 1 + 8uv\frac{\partial u}{\partial x} - 12v \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1-12v}{1-8uv},\ 1 - 8uv \neq 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 3 = 2u(1 + 4v\frac{\partial v}{\partial x}) - 3 = 2u + 8uv\frac{\partial v}{\partial x} - 3 \implies \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u-3}{1-8uv},\ 1 - 8uv \neq 0$

Aufgabe 9.4

a) Ist nahe (x_0, y_0) durch $F(x,y,z)=0$ eine Funktion $z=g(x,y)$ mit $g(x_0,y_0)=z_0$ definiert, so folgt aus $F(x,y,g(x,y))=0$:

$$\frac{\partial}{\partial d} g(x_0,y_0) = - \frac{\frac{\partial}{\partial d} F(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial}{\partial z} F(x_0,y_0,z_0)}$$. gesucht ist (x_0,y_0,z_0)

$d = x, y$

mit $F(x_0,y_0,z_0)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0,z_0)=0\end{array}\right\} \rightarrow \nabla g(x_0,y_0)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

das bedeutet: Bedingungen / Gleichungen für (x_0,y_0,z_0)

$$\begin{cases} z^3+2z^2-3xyz+x^3-y^3=0 & (1) \\ x^2-yz=0 & (2) \\ xz+y^2=0 & (3) \\ 3z^2+4z-3xy \neq 0 & (4) \end{cases}$$

$(2)-(3) \rightarrow (x+y)(x-y-z)=0 \quad (5)$

i) $x=-y$ (6) $\xrightarrow{(3)} y(y-z)=0 \quad (7)$

$i)_1 \quad y=0 \xrightarrow{(6)} x=0 \xrightarrow{(1)} z^2(z+2)=0$

$\rightarrow z=-2$, insgesamt: $\underline{(0,0,-2)}$

$z=0$ ist keine Lösung, da (4) verletzt ist

$i)_2 \quad y=z, \; x=-y$ in (1): $2y^2(y+1)=0$

$y=0$ ist nicht brauchbar, $y=-1$

$\underline{(1,-1,-1)}$

ii) $\underline{z = x - y} \xrightarrow{\text{in (2)}} 0 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$

$\rightarrow x = \frac{1}{2}y, \; y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow z = 0$

nicht brauchbar.

Ergebnis:

Nahe $(0,0)$ wird durch $F(x,y,z) = 0$ eine Fkt $z = g_1(x,y)$ mit $g_1(0,0) = -2$ und $\nabla g_1(0,0) = 0$ und nahe $(1,-1)$ wird durch $F(x,y,z) = 0$ eine Funktion $z = g_2(x,y)$ mit $g_2(1,-1) = -1$ und $\nabla g_2(1,-1) = 0$ definiert.

---

b) $$G_1(x,y) := F(x,y,g_1(x,y)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_1(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_1(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow H_{g_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$H_{g_1}(0,0)$ ist indefinit $\rightarrow$ $\underline{g_1 \text{ hat in } (0,0) \text{ einen Sattelpunkt } (g_1(0,0) \text{ ist kein Extremwert})}$

Ganz ebenso, ausgehend von $G_2(x,y) := F(x,y,g_2(x,y))$ findet man $$H_{g_2}(+1,-1) = \begin{pmatrix} -3 & -3/2 \\ -3/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$H_{g_2}(1,-1)$ ist negativ definit: $\underline{g_2 \text{ besitzt in } (1,-1) \text{ ein lokales Maximum.}}$

---

c) $$T_2(g_1)(x,y,0,0) = -\frac{3}{2}xy - 2$$

$$T_2(g_2)(x,y,1,-1) = -\frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}(y+1)^2 - \frac{3}{2}(x-1)(y+1) - 1$$

Blatt 9 (Tutorien)

Aufgabe 9.5

a) i) $f(x,y) = y^3 + x^2 y - 3y$

$\frac{\partial}{\partial x} f = 2xy$, $\frac{\partial}{\partial y} f = 3y^2 + x^2 - 3$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 6y$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 2x$

$\frac{\partial}{\partial x} f = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} f = 0$ hat die vier Lösungen $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$.
Diese Punkte sind Kandidaten für lokale Extrema.

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix} \rightarrow H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{pmatrix}$, $H_f(\pm\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

In $(\pm\sqrt{3}, 0)$ ist H_f indefinit, hier liegen Sattelpunkte.

In $(0,1)$ ist H_f positiv definit: In $(0,1)$ liegt für f ein lokales Min
$f(0,1) = -2$

In $(0,-1)$ ist H_f negativ definit: In $(0,-1)$ liegt ein lokales Max $f(0,-1) = 2$

ii) $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 4yz + 5z^2 - 4z + 4$

$$\text{grad}\, g(x,y,z) = (8x,\ 2y - 4z,\ -4y + 10z - 4) = 0 \implies x = 0, y = 4, z = 2$$

$$Hg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \text{ positiv definit (alle Hauptabschnittsdeterminanten positiv)}$$

$$\det(8) = 8,\ \det\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 16,\ \det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} = 32$$

Lokales Minimum bei $(0, 4, 2)^T$

9.5 b)

$h(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

stationäre Punkte im Innern von B:

$\operatorname{grad} h(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2) = 0$

$\Rightarrow y = 2x^2 \Rightarrow 3x(8x^3 - 1) = 0$

$(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sind also stat. Pkte im Innern

$h(0,0) = -3$, $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{13}{4}$

Randverhalten:

- oberer Rand

$h(x,1) = 2x^3 - 3x - 1$

$h(-1,1) = 0$, $h(1,1) = -2$

$\frac{\partial}{\partial x} h(x,1) = 6x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \sqrt{2} - 1$, $h(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = -\sqrt{2} - 1$

- unterer Rand

$h(x,-1) = 2x^3 + 3x - 5$

$h(-1,-1) = -10$, $h(+1,-1) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x} h(x,-1) = 6x^2 + 3 > 0$

Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ ist damit auch das Verhalten am linken und rechten Rand klar.

Durch Vergleich der Funktionswerte der stat. Pkte im Innern, der kritischen Punkte ~~am~~ des Randes und der Eckpunkte ergibt sich:

Das absolute Minimum von h auf B ist -10 und wird im Punkt $(-1,-1)$ angenommen. Das absolute Maximum von h auf B ist $\sqrt{2} - 1$ und wird in den Punkten $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ und $(1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ angenommen.

Aufgabe 9.6

a) Eine Probe ergibt, daß der gegebene Punkt $(3,1)$ tatsächlich die Gleichung $f(3,1) = 0$ mit $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 2$ erfüllt.
grad $f(x,y) = (2x - 2y - 2, -2x - 2y + 2) \Longrightarrow$ grad $f(3,1) = (2,-6)$
Da $f_x(3,1) = 2 \neq 0$, ist $f(x,y) = 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen lokal nach x auflösbar, d. h. es gibt lokal eine C^1-Funktion h mit $h(1) = 3$ und $f(h(y),y) = 0$.
Die Ableitungen von h im Punkt $y = 1$ berechnen sich durch Differenzieren der Gleichung

$$f(h(y),y) = h(y)^2 - 2yh(y) - y^2 - 2h(y) + 2y + 2 = 0$$

nach y unter Berücksichtigung von $h(1) = 3$:
$2h(y)h'(y) - 2h(y) - 2yh'(y) - 2y - 2h'(y) + 2 = 0$
$\Longrightarrow 6h'(1) - 6 - 2h'(1) - 2 - 2h'(1) + 2 = 0 \Longrightarrow h'(1) = 3.$
Nochmaliges Differenzieren ergibt:
$2(h'(y))^2 + 2h(y)h''(y) - 2h'(y) - 2h'(y) - 2yh''(y) - 2 - 2h''(y) = 0$
$\Longrightarrow 18 + 6h''(y) - 6 - 6 - 2h''(y) - 2 - 2h''(y) = 0 \Longrightarrow h''(1) = -2.$

b) $T_2(y,1) = 3 + 3(y-1) - (y-1)^2 = -y^2 + 5y - 1$

c) Fasse $x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ als quadratische Gleichung in x auf:
$x^2 - 2(y+1)x - y^2 + 2y + 2 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2(y+1)x + (y+1)^2 = (y+1)^2 + y^2 - 2y - 2$
$\Longrightarrow (x - (y+1))^2 = 2y^2 - 1 \Longrightarrow x = y + 1 \pm \sqrt{2y^2 - 1}$
Wegen $h(1) = 3$ kommt nur die positive Wurzel in Frage. Der maximale Definitionsbereich D ergibt sich aus der Bedingung $2y^2 - 1 \geqslant 0$. Wir erhalten also

$$h(y) = y + 1 + \sqrt{2y^2 - 1} \text{ mit } D = \mathbb{R}\setminus\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[.$$

Die unter a) berechneten Ableitungen können nun bestätigt werden:

$$h'(y) = 1 + \frac{2y}{\sqrt{2y^2 - 1}} \Longrightarrow h'(1) = 3, \quad h''(y) = \frac{-2}{(2y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow h''(1) = -2.$$

Aufgabe 9.7

Sei $g(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,u,v) \\ g_2(x,y,u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u^2 + ve^{-u} + xu - 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} - x \end{pmatrix}$.

Dann liegt das Gleichungssystem $g(x,y,u,v) = 0$ vor.

$g(0,0,u,v) = 0$ ergibt $u = 0$, $v = 1$.

$(0,0,0,1)$ ist also Lösungspunkt.

Mit $a = (x,y)$ und $b = (u,v)$ ist

$$\frac{\partial g}{\partial b}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(a,b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(a,b) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial b}(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \frac{\partial g}{\partial b}(0,0,0,1) = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial b}(0,0,0,1)$ ist invertierbar

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0,0)$ zwei Funktionen $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ mit $u(0,0) = 0$, $v(0,0) = 1$ und $g(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$. u und v sind dabei eindeutig bestimmt.

Berechnung von u_x, u_Y, v_x und v_Y in $(0,0)$:

1. Möglichkeit (Ableitungsformel)

Mit $\frac{\partial g}{\partial a}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g_1}{\partial Y}(a,b) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g_2}{\partial Y}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ Y-1 & x+v \end{pmatrix}$

und $f(x,Y) = \begin{pmatrix} u(x,Y) \\ v(x,Y) \end{pmatrix}$ gilt

$$Jf(x,Y) = \begin{pmatrix} u_x(x,Y) & u_Y(x,Y) \\ v_x(x,Y) & v_Y(x,Y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial g}{\partial b}(x,Y,f(x,Y))\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial a}(x,Y,f(x,Y))\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_x(0,0) & u_Y(0,0) \\ v_x(0,0) & v_Y(0,0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (äquivalente) Möglichkeit (implizites Ableiten)

$g(x,Y,u(x,Y),v(x,Y)) = 0$

Sei $G(x,Y) := g(x,Y,u(x,Y),v(x,Y))$.

$\Rightarrow G(x,Y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} G(x,Y) = 0$, $\frac{\partial}{\partial Y} G(x,Y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} G(0,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial Y} G(0,0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0,0,1) + \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0,0,1)\, u_x(0,0) + \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0,0,1)\, v_x(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0,0,1) + \frac{\partial g_2}{\partial u}(0,0,0,1)\, u_x(0,0) + \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,0,0,1)\, v_x(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial Y}(0,0,0,1) + \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0,0,1)\, u_Y(0,0) + \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0,0,1)\, v_Y(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial Y}(0,0,0,1) + \frac{\partial g_2}{\partial u}(0,0,0,1)\, u_Y(0,0) + \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,0,0,1)\, v_Y(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -u_x(0,0) + v_x(0,0) = 0$$

$$-1 + u_x(0,0) = 0$$

$$-u_y(0,0) + v_y(0,0) = 0$$

$$1 + u_y(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_x(0,0) = v_x(0,0) = 1$$

$$u_y(0,0) = v_y(0,0) = -1$$