

Übungen

Aufgabe 10.1 Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh x & \cos y \\ \sinh x & \sin y \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$, so dass U durch die Funktion g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- b) Beweisen Sie, dass die Funktion g in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber g nicht injektiv ist.

Aufgabe 10.2 Gegeben seien die Kugel K um $M = (1, -1, 2)$ mit Radius 1 sowie die Ebenen $E : z - 2 = 0$ und $F : x - y + 2 = 0$.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Regel diejenigen Punkte auf dem Schnittkreis von K und E , die von der Schnittgeraden von E und F den kleinsten bzw. den größten Abstand haben und geben Sie die Abstände an.
- b) Bestimmen Sie die Punkte aus a) mit Hilfe geometrischer Überlegungen.

Aufgabe 10.3 Gegeben sei eine quadratische Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit einer reellen, symmetrischen Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- a) Zeigen Sie mit Mitteln der Analysis, dass das absolute Maximum von f unter der Nebenbedingung $|x| = 1$ existiert und der größte Eigenwert von A ist.
- b) Sei $x = u$ eine Stelle, an der das absolute Maximum aus a) angenommen werde. Zeigen Sie wiederum mit Mitteln der Analysis, dass $\mu = \max\{f(x) : |x| = 1 \text{ und } \langle x, u \rangle = 0\}$ existiert und ebenfalls ein Eigenwert von A ist.
- c) Welche algebraische Vielfachheit muss der größte Eigenwert von A haben, dass μ gleich dem zweitgrößten Eigenwert von A ist?

Aufgabe 10.4 a) Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y) = e^x(x^2 - 2y^2)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 6$.

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema von f auf der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 6\}$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $h(x, y, z) = x + y + z$ unter den Nebenbedingungen $x^2 - y^2 = 1$ und $2x + z = 1$ kein Extremum besitzt.

Aufgabe 10.5 a) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ zum Ursprung.

b) Die Dichte einer metallischen Fläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sei durch $\rho(x, y, z) = 2 + xz + y^2$ gegeben. Berechnen Sie die Stellen, in denen die Dichte am größten und am kleinsten ist.

Hörsaalübung am 27.6.06: Aufgaben 10.1, 10.2, 10.3,

Tutorien in der Woche 26.–30.6.06: Aufgaben 10.4, 10.5.