Blatt 10 (Hörsaalübung)

Aufgabe 10.1

a) Die Funktion g ist offensichtlich stetig differenzierbar. Weiter ist

$$g(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.
Der Satz über die inverse Funktion liefert daher die Behauptung und außerdem

$$\big(g^{-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(g'(g^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(g'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion g ist überall stetig differenzierbar und für alle (x, y) ist

$$\det g'(x,y) = (\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2.$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \cos y = 0$ und $\cosh x \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $g'(x,y)$ stets regulär. Der Satz über die inverse Funktion liefert nun die lokale Invertierbarkeit.
Die Funktion g ist aber nicht injektiv (auch nicht auf der Menge $\{\,(x,y) : x > 0\,\}$, wo g ja überall lokal invertierbar ist), denn $g(x, y + 2\pi) = g(x,y)$.

Aufgabe 10.2

a) K lässt sich beschreiben durch die Gleichung

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$$

Daher lässt sich $K \cap E$ beschreiben durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+1)^2 &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Da auch für $E \cap F$ die Beziehung $z = 2$ gelten muss, genügt es, das Extremwertproblem in der $z = 2$ – Ebene zu untersuchen. Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates, was wir im folgenden tun werden. Da für alle Punkte auf der Geraden $E \cap F$ die Beziehung $y = x + 2$ gelten muss, müssen wir also stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y, t) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t+2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x-t)^2 + (y-t-2)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, t) = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

suchen.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $F(x, y, t, \lambda) = f(x, y, t) + \lambda g(x, y, t)$, und die notwendige Bedingung lautet:

$$\nabla F(x, y, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(x-t) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-t-2) + 2\lambda(y+1) \\ -2(x-t) - 2(y-t-2) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgrung der dritten Gleichung muss $(x-t) = -(y-t-2)$ sein. Ersetzt man daher in der ersten Gleichung $(x-t)$ durch $-(y-t-2)$ und addiert dann die zweite Gleichung, so erhält man

$$2\lambda(x+y) = 0$$

Da $\lambda \neq 0$ sein muss (anderenfalls wäre $x = t$ und $y = t+2$, was für alle $t \in \mathbb{R}$ einen Widerspruch zur vierten Gleichung verursachen würde), folgt

$$y = -x$$

Diese Beziehung eingesetzt in die dritte Gleichung liefert

$$t = -1$$

Die beiden letzten Beziehungen eingesetzt in die vierte Gleichung ergibt $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$

$$\Longrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow y_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Damit sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$ Kandidaten für Punkte auf dem Kreis mit extremalem Abstand von der Geraden. Da der Abstand eines Punktes zu einer Geraden stetig von dem Punkt abhängt und die Menge $g(x, y) = 0$ kompakt ist, werden Maximum und Minimum tatsächlich auch angenommen. Da $\sqrt{f(P_1, -1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2, -1)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird somit im Punkt P_1 der maximale Abstand und im Punkt P_2 der minimale Abstand angenommen.

b) Die Punkte extremalen Abstandes liegen auf der Lotgeraden des Mittelpunktes $M = (1, -1, 2)$ des Kreises $K \cap E$ auf die Gerade $E \cap F$, also auf $y = -x$ in der $z = 2$ – Ebene. Eingesetzt in die Kreisgleichung ergeben sich wie unter a) P_1 und P_2. Der maximale Abstand ist gleich dem Abstand von M zu $E \cap F$, also $2\sqrt{2}$, plus dem Kreisradius $r = 1$. Entsprechend ergibt sich der minimale Abstand als $2\sqrt{2}$ minus Kreisradius.

Aufgabe 10.3

a) Da die Menge $\{x \in R^n \mid |x| = 1\}$ kompakt ist, gibt es mindestens einen Punkt x, an dem die Funktion f unter der Nebenbedingung $|x| = 1$ maximal wird.
Sei $g(x) := |x|^2 - 1$. Dann wird das absolute Maximum von f unter der Nebenbedingung $|x| = 1$ an einem Punkt x angenommen, der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ |x|^2 &= 1 \end{aligned}$$

ist. Wegen $\nabla f(x) = 2Ax$ und $\nabla g(x) = 2x$ ist die erste Gleichung des obigen Gleichungssystems äquivalent zur Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

Die Lösungen des obigen Gleichungssystems sind daher alle Eigenvektoren von A mit Betrag 1. Da f für jeden Eigenvektor von A mit Betrag 1 als Funktionswert den zugehörigen Eigenwert hat, ist somit das absolute Maximum von f unter der Nebenbedingung $|x| = 1$ der größte Eigenwert von A.

b) Da die Menge $\{x \in R^n \mid |x| = 1 \quad \text{und} \quad \langle x, u\rangle = 0\}$ ebenfalls kompakt ist, existiert das gesuchte Maximum. Es wird an einem Punkt x angenommen, der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) + \nu \nabla h(x) \\ |x|^2 &= 1 \end{aligned}$$

ist, wobei $h(x) = \langle x, u\rangle$ ist. Wegen $\nabla h(x) = u$ ist die erste Gleichung des obigen Gleichungssystems äquivalent zur Gleichung

$$Ax = \lambda x + \tfrac{1}{2}\nu u$$

Wegen $\langle x, u\rangle = 0$, $\langle u, u\rangle = 1$ und $\langle Ax, u\rangle = \langle x, Au\rangle$ (A ist symmetrisch), und da u ein Eigenvektor von A ist, folgt

$$\begin{aligned} \nu &= \nu\langle u, u\rangle = \langle \nu u, u\rangle = \langle 2Ax - 2\lambda x, u\rangle = 2\langle Ax, u\rangle - 2\lambda\langle x, u\rangle \\ &= 2\langle Ax, u\rangle = 2\langle x, Au\rangle = 2\langle x, \alpha u\rangle = 2\alpha\langle x, u\rangle = 0, \end{aligned}$$

also

$$Ax = \lambda x.$$

c) Die algebraische Vielfachheit des größten Eigenwertes von A muss 1 sein, denn sonst wäre μ gleich dem größten Eigenwert von A.

Aufgabe 10.4

a)

Lagrange Ansatz: Die Extremstellen sind unter den Lösungen der Gleichungen

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ und $g(x,y) = 6$, d.h.

$$(x^2+2x-2y^2)e^x = 2\lambda x \quad (1)$$
$$-4y\, e^x = 4\lambda y \quad (2)$$
$$x^2+2y^2 = 6 \quad (3)$$

1. Fall: $y = 0 \xrightarrow{(3)} x = \pm\sqrt{6} \xrightarrow{(1)} \lambda = (1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{6})e^{\pm\sqrt{6}}$

$f(\sqrt{6}, 0) = 6e^{\sqrt{6}}$, $f(-\sqrt{6}, 0) = 6e^{-\sqrt{6}}$

2. Fall: $y \neq 0 \xrightarrow{(2)} \lambda = -e^x \neq 0 \quad (4)$

(3), (4) in (1): $-(2x^2+2x-6)\lambda = 2\lambda x$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ oder } x = -3$$

$\xrightarrow{(3)} y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ ($9+2y^2=6$ hat keine reelle Lösung)

$\xrightarrow{(4)} \lambda = -e$ oder $\lambda = -e^{-3}$

$f(1, \sqrt{\frac{5}{2}}) = f(1, -\sqrt{\frac{5}{2}}) = -4e$

f nimmt also in $(\sqrt{6}, 0)$ das absolute Maximum mit dem Wert $6e^{\sqrt{6}}$ und in $(1, \pm\sqrt{\frac{5}{2}})$ das absolute Minimum mit dem Wert $-4e$ an.

10.4 b)

stationäre Punkte von f im Innern von M:

grad $f(x,y) = ((x^2+2x-2y^2)e^x, -4ye^x) = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ und $(-2,0)$ sind stat. Pkte im Innern

$f(0,0) = 0$, $f(-2,0) = 4e^{-2}$

Der Rand von M wurde bereits in a) untersucht. Durch Vergleich der in a) und b) berechneten Funktionswerte erkennt man, dass die absoluten Extrema von f auf M mit den absoluten Extrema aus a) übereinstimmen.

c) Wir machen mit

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= x+y+z \\ p(x,y,z) &= x^2-y^2-1 \\ q(x,y,z) &= 2x+z-1 \end{aligned}$$

den Ansatz:

$$F(x,y,z) = h(x,y,z) + \lambda p(x,y,z) + \mu q(x,y,z)$$

Wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\mu + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \mu = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = 2x + z - 1 = 0 \quad (5)$$

(3) ergibt $\mu = -1$. Dies setzen wir in (1) ein. Wir erhalten $2\lambda x = 1$. Wir setzen in (2) dies für 1 ein. Es muß also $\lambda = 0$ oder $x = y$ sein. Ersteres steht im Widerspruch zu (2) und letzteres zu (4). Es gibt somit keine Extrema unter diesen Nebenbedingungen.

Aufgabe 10.5

a) Die Rechnungen sind wesentlich einfacher, wenn man zunächst eine Koordinatentransformation durchführt, so dass in den neuen Koordinaten die Hyperbel in Normalform vorliegt. Eine solche Koordinatentransformation ist zulässig, da sie bekanntlich eine orthogonale Abbildung ist und daher alle Abstände gleich lässt.
Sei $f(x,y) = x^2 + y^2$ (= Quadrat des Abstandes vom Ursprung zu beliebigen Punkt in der xy-Ebene) und $g(x,y) = 9x^2 - y^2 - 225 = 0$ (Gleichung der Hyperbel nach der Koordinatentransformation) die Nebenbedingung. Mit der Lagrange-Funktion

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(9x^2 - y^2 - 225)$$

erhalten wir

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 18\lambda x \\ 2y - 2\lambda y \\ 9x^2 - y^2 - 225 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

1. Fall: Für $x = 0$ ist $y \neq 0 \Longrightarrow y^2 = -225 \Longrightarrow$ keine reelle Lösung.
2. Fall: $\lambda = -9 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow 9x^2 = 225 \Longrightarrow x = \pm 5$. Der kürzeste Abstand der Hyperbel zum Ursprung ist 5.

b) Lagrange Ansatz: Die Extremwertstellen sind unter den Lösungen x, y, z der Gleichungen $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 4$ das heißt

$$\begin{aligned} z &= 2\lambda x & (1)\\ 2y &= 2\lambda y & (2)\\ x &= 2\lambda z & (3)\\ x^2+y^2+z^2 &= 4 & (4) \end{aligned}$$

1. Fall: $y \neq 0 \xrightarrow{(2)} \lambda = 1 \xrightarrow{(1),(3)} x = z = 0 \xrightarrow{(4)} y = \pm 2$

$P_1(0,2,0)$, $P_2(0,-2,0)$

2. Fall: $y = 0 \to z \neq 0$ (mit $z = 0$ würde (3) $x = 0$ also $x=0, y=0, z=0$ gelten, was wegen (4) ausgeschlossen ist.)

Aus $z = 2\lambda x$, $x = 2\lambda z$ folgt $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, also $x = \pm z$

$x = z \xrightarrow{(4)} x = z = \pm\sqrt{2}$: $P_3(\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2})$, $P_4(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$

Aus $x = -z$ folgt $x = \pm\sqrt{2}$: $P_5(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $P_6(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

In P_1 und P_2 wird f maximal $= 6$

in P_5 und P_6 ist f minimal $= 0$