

Übungen

Aufgabe 11.1 a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse bei homogener Massenverteilung für die Pyramide $D \subset \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 und folgender Spitze S :

$$P_1 = (1, 1, 0)^T, P_2 = (-1, 1, 0)^T, P_3 = (-1, -1, 0)^T, P_4 = (1, -1, 0)^T, S = (0, 0, 1)^T.$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rohres

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \vee 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

mit homogener Massendichte bezüglich der z -Achse unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 11.2 Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9 \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral $\int_E (x^2 + y + z^2) d(x, y, z)$ unter Verwendung von

- a) Zylinderkoordinaten,
- b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten.

Aufgabe 11.3 a) Es sei f auf dem Rechteck $R = [1, 2] \times [1, 4]$ wie folgt definiert:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+y)^2} & \text{für } x \leq y \leq 2x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Teil von R , in dem $f \neq 0$ ist, und berechnen Sie $\int_R f d(x, y)$.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x + y \leq 1 \wedge 0 \leq x - y \leq 2 \right\}.$$

unter Verwendung der Transformation $u = x + y, v = x - y$.

Aufgabe 11.4 a) Gegeben sei die Funktion $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um

i) die x -Achse

ii) die y -Achse

rotiert.

b) Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Körpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Funktionsgraphen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \frac{2x}{\pi}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ um die x -Achse rotiert.

Aufgabe 11.5 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_D \cos(x+y) d(x,y), \quad D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$

b) $\int_D \frac{x^2+e^y}{z+1} d(x,y,z), \quad D = [-1, 2] \times [0, 1] \times [0, e-1]$

c) $\int_D (\ln(x) + y^2 e^z) d(x,y,z), \quad D = [1, 2]^3$

d) $\int_D \sqrt{x^2+y^2} d(x,y), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

Aufgabe 11.6 a) Bestimmen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen $z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 9$ und das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ eingeschlossen wird.

c) Sei D die Schnittfläche, welche durch die Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq 1$ und die beiden Halbebenen $y \geq -x$ und $x \leq 0$ gebildet wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt sowie den Schwerpunkt von D . Dabei werde eine homogene Massenverteilung $\rho(x,y) = 3$ für alle $(x,y)^T \in D$ angenommen.

Aufgabe 11.7 a) Skizzieren Sie die folgenden Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt.

1. $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y^2 < x < 4 - y^2 \}$

2. $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0, xy < 1, (2-x)(2-y) > 0 \}$

b) Skizzieren Sie den folgenden Integrationsbereich und berechnen Sie das Integral:

$$\int_G \sqrt{y} d(x,y),$$

wobei G von der Parabel durch die Punkte $(0,0)$, $(1,6)$ und $(5,-10)$ sowie von der x -Achse begrenzt sei.

Hörsaalübung am 4.7.06: Aufgaben 11.1, 11.2, 11.3,

Tutorien in der Woche 3.–7.7.06: Aufgaben 11.4, 11.5, 11.6, 11.7.