Blatt 11 (Hörsaalübung)

Aufgabe 11.1

a) Für die Pyramide gilt $D = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, wobei die T_i vier kongruente Tetraeder sind. Der Tetraeder T_1 beispielsweise lässt sich in folgender Weise als Normalbereich beschreiben:

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge -x \leqslant y \leqslant x \wedge 0 \leqslant z \leqslant 1 - x \right\}.$$

Damit ergibt sich das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse

$$\Theta_z = \int\limits_D \rho r^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 4\rho \int\limits_{T_1} (x^2 + y^2)\,d(x,y,z) = 4\rho \int\limits_0^1 \int\limits_{-x}^{x} \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$$

$$= 4\rho \int\limits_0^1 \int\limits_{-x}^{x} (1-x)(x^2+y^2)\,dy\,dx = 8\rho \int\limits_0^1 (1-x)\left(x^2 y + \tfrac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx = \tfrac{32\rho}{3} \int\limits_0^1 (1-x)x^3\,dx = \tfrac{8\rho}{15}.$$

b) Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad (\Longrightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r,\varphi,z)) = r)$$

wird der Quader

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leqslant r \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \wedge 0 \leqslant z \leqslant 1 \right\}$$

auf das Rohr R transformiert, d. h., es gilt $R = \Phi(Q)$. Damit ergibt sich das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse

$$\Theta_z = \int\limits_R \rho r^2(\mathbf{x})\,d(\mathbf{x}) = \int\limits_Q \rho r^2 |\det(\mathbf{J}\Phi(r,\varphi,z))|\,d(r,\varphi,z) = \rho \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 r^3\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \rho \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 r^3\,dr = \tfrac{15\pi\rho}{2}$$

Aufgabe 11.2

a) Mit den Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,y) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Longrightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r,\varphi,y)) = r)$$

wird E transformiert auf

$$\Phi^{-1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 3 \wedge 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \wedge -\frac{\sqrt{9-r^2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{9-r^2}}{2} \right\}.$$

Damit ergibt sich das Integral

$$\int_E (x^2+y+z^2)\,d(x,y,z) = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\sqrt{9-r^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-r^2}}{2}} (r^2+y) r \,dy\,d\varphi\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 r^3\sqrt{9-r^2}\,dr = 2\pi(-3(9-r^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}(9-r^2)^{\frac{5}{2}})\Big|_0^3 = \tfrac{324\pi}{5}$$

b) Mit den an das Ellipsoid angepassten Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ \frac{r\sin\varphi\cos\theta}{2} \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Longrightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r,\varphi,\theta) = \frac{r^2}{2}\cos\theta)$$

wird E transformiert auf

$$\Phi^{-1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 3 \wedge 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Damit ergibt sich das Integral

$$\int_E (x^2+y+z^2)\,d(x,y,z) = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + \tfrac{r}{2}\sin\varphi\cos\theta + r^2\sin^2\theta)\tfrac{r^2}{2}\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big\{ \int_0^3 \tfrac{r^3}{2}\,dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + \int_0^3 r^4\,dr (\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta) \Big\}$$

$$= \tfrac{3^5}{10}(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta + \tfrac{2\pi}{3}\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}) = \tfrac{324\pi}{5}$$

Aufgabe 11.3

b) Die Transformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

transformiert das Rechteck R in das Rechteck

$$\tilde{R} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqslant u \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant v \leqslant 2 \right\},$$

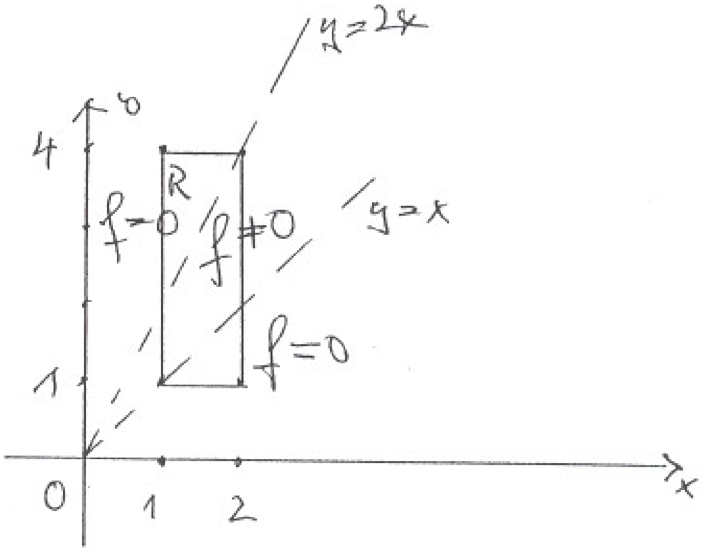
d. h. $\tilde{R} = \Psi(R)$. Die Umkehrabbildung $\Phi = \Psi^{-1}$ ergibt sich durch Invertieren der regulären Matrix $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(u,v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Damit ist Φ auf $\tilde{R}$ ein C^1-Diffeomorphismus, und der Transformationssatz kann zur Flächenberechnung von R angewendet werden:

$$\int_R 1 \, d(x,y) = \int_{\tilde{R}} |\det(\mathbf{J}\Phi(u,v))| \, d(u,v) = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2} |\det \mathbf{A}^{-1}| \, dv \, du = 2.$$

a)



$$\iint_R f(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_{x=1}^{2} \int_{y=x}^{2x} \frac{dy}{(x+y)^2} \, dx$$

$$= \underline{\frac{1}{6} \ln 2}$$

Blatt 11 (Tutorien)

Aufgabe 11.4

a)

i) $V_{x-Achse} = \pi \int_0^a (x^2)^2\, dx = \frac{\pi x^5}{5}\Big|_0^a = \frac{\pi a^5}{5}$

ii) $V_{y-Achse} = \pi \int_0^{a^2} (\sqrt{x})^2\, dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^{a^2} = \frac{\pi a^4}{2}$

b)

$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{2x}{\pi})^2\, dx = \pi(\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) - \frac{4x^3}{3\pi^2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12}$

$M = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi}\sqrt{1+(\frac{2}{\pi})^2}\, dx$

$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt + 4\sqrt{1+(\frac{2}{\pi})^2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2}))\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4} =$

$\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2})$

Aufgabe 11.5

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi} \cos(x+y)\, dy\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\Big|_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi) - \sin(x)\, dx$

$= (-\cos(x+\pi) + \cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2$

b) $\int\limits_{-1}^{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{e-1} \frac{x^2+e^y}{z+1}\, dz\, dy\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_0^1 (x^2+e^y)\ln|z+1|\Big|_0^{e-1} dy\, dx = \int\limits_{-1}^{2} (x^2 y + e^y)\Big|_0^1 dx$

$= \int\limits_{-1}^{2} (x^2 + e - 1)\, dx = 3e$

c) $\int\limits_1^2 \int\limits_1^2 \int\limits_1^2 (\ln(x) + y^2 e^z)\, dz\, dy\, dx = \int\limits_1^2 \int\limits_1^2 (z\ln(x) + y^2 e^z)\Big|_1^2 dy\, dx$

$= \int\limits_1^2 \int\limits_1^2 (\ln(x) + y^2(e^2 - e))\, dy\, dx = \int\limits_1^2 (y\ln(x) + \frac{y^3}{3}(e^2-e))\Big|_1^2 dx$

$= \int\limits_1^2 (\ln(x) + \frac{7}{3}(e^2-e))\, dx = 2\ln(2) - 1 + \frac{7}{3}(e^2-e)$

d) Wir führen Polarkoordinaten ein: $\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, dann ist

$\Phi(R) = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\;|\; 2 \leqslant r \leqslant 3\}$ und $\det(\mathbf{J}\Phi) = r$.

$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_2^3 r^2\, dr\, d\varphi = \frac{38}{3}\pi$

Aufgabe 11.6

a) $\int_0^6 \int_0^{6-x} \int_{x+y}^6 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^6 \int_0^{6-x} (6-x-y)\,dy\,dx = \int_0^6 (6y - xy - \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{6-x} dx$

$\int_0^6 (\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18)\,dx = (\frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 18x)\Big|_0^6 = 36$

c) Die Schnittmenge kann als Normalbereich geschrieben werden:

$$D = \left\{(x,y) \mid -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 0 \wedge -x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Der Flächeninhalt (Achtelkreis) berechnet sich damit durch

$F = \int_D 1\,d(x,y) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} y\Big|_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (\sqrt{1-x^2}+x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} + x^2)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{8}.$

Für den Schwerpunkt werden die folgenden Integrale benötigt:

$\int_D x\,d(x,y) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} x(\sqrt{1-x^2}+x)\,dx = \frac{\sqrt{2}-2}{6}$

$\int_D y\,d(x,y) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (1-x^2) - x^2\,dx = \frac{2}{3\sqrt{8}}$

Damit ergibt sich der Schwerpunkt

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \frac{\int_D 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x,y)}{\int_D 3\,d(x,y)} = \frac{8}{\pi} \begin{pmatrix} \int_D x\,d(x,y) \\ \int_D y\,d(x,y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.2486 \\ 0.6002 \end{pmatrix}.$$

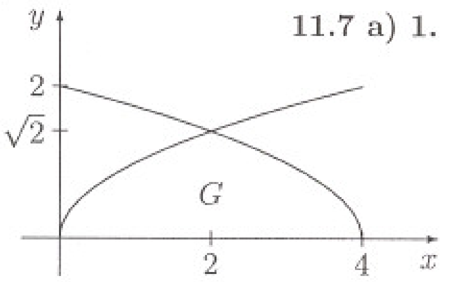
b) Wir betrachten das Paraboloid als Rotation um die $z-$Achse:

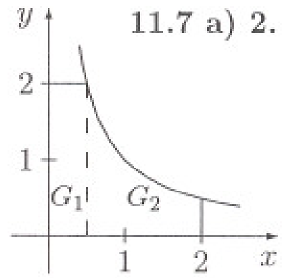
$V = \frac{\pi}{4} \int_0^9 (\sqrt{z})^2\,dz = \frac{\pi}{4} \frac{z^2}{2}\Big|_0^9 = \frac{81}{8}\pi$ oder:

Einführung von Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$

$V = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2}^9 r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r - r^3)\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4)\Big|_0^3 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\frac{81}{2} - \frac{81}{4})\,d\varphi$

$= \frac{81}{8}\pi$





Aufgabe 11.7

a)

1. Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze).

$$I(G) = \int_0^{\sqrt{2}} \left((4 - y^2) - y^2\right) dy = 4y - \tfrac{2}{3}y^3 \Big|_{y=0}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$

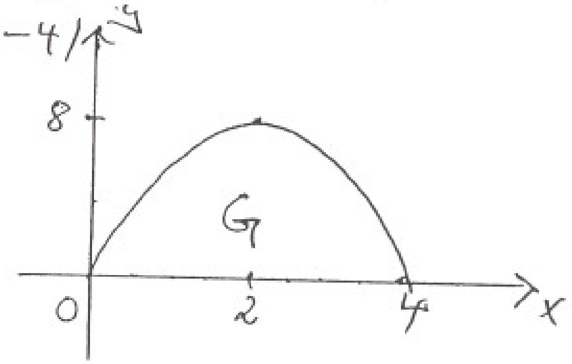
2. Wir untersuchen die letzte Bedingung genauer: $(2 - x)(2 - y) > 0$ ist erfüllt, wenn $x < 2$ und $y < 2$ gilt, oder aber, wenn $x > 2$ und $y > 2$ gilt. Im Falle $x > 2$ und $y > 2$ kann jedoch $xy < 1$ nicht erfüllt sein, also können wir $(2-x)(2-y) > 0$ in der Definition von G ersetzen durch $x, y < 2$.

Wir unterteilen G in zwei Gebiete G_1 und G_2 (siehe Skizze). Dann ist

$$I(G) = I(G_1) + I(G_2) = \int_0^{1/2} 2\,dx + \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln x \Big|_{x=1/2}^{2} = 1 + \ln 2 - \ln \tfrac{1}{2} = 1 + 2\ln 2\,.$$

b) Die begrenzende Parabel (Ansatz: $y(x) = ax^2 + bx + c$) ist

$$y = -2x^2 + 8x = -2x(x-4)$$



$$\iint_G \sqrt{y}\, d(x,y) = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{8x-2x^2} \sqrt{y}\, dy\, dx$$

$$= \underline{8\sqrt{2}\,\pi}$$