

Übungen

Aufgabe 12.1 a) Bestimmen Sie die Länge und die Krümmung der Kurve $\mathbf{a} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{a}(t) = (\arcsin t, t, \sqrt{1-t^2})^T.$$

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch orthogonale Projektion der Kurve $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $\mathbf{b}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$ auf die x-y-Ebene entsteht.

c) Für $t \in [-2, 2]$ sei die Strophoide mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ \frac{t^2 + 1}{t(t^2 - 1)} \\ \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die von der Strophoide $\mathbf{c}$ umschlossene Fläche für $t \in [-1, 1]$.

Aufgabe 12.2 a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ durch $v(x, y) = (xy, y^2)^T$. Bestimmen Sie $\int_c \langle v(x), dx \rangle$, wobei c der Weg entlang $y = 2x^2$ ist, welcher $(0,0)$ mit $(1,2)$ verbindet. Hängt der Wert des Integrals vom gewählten Verbindungsweg der Punkte $(0,0)$ und $(1,2)$ ab?

b) Gegeben sei das Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ durch

$$E(x, y, z) = \begin{pmatrix} yf(xy) \sin z + x + y \\ xf(xy) \sin z + x + y - z \\ f(xy) \cos z - y + z \end{pmatrix},$$

wobei f eine stetig differenzierbare Funktion sei. Bestimmen Sie f , so dass $f(0) = 1$ und E ein Gradientenfeld ist. Sei E mit diesem f ein elektrisches Feld. Bestimmen Sie die Arbeit für die Bewegung einer elektrischen Ladung q in diesem elektrischen Feld von $(1, 1, \pi)$ nach $(2, 1, 0)$.

Aufgabe 12.3 Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \\ xy \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\int_c \langle v(x), dx \rangle$, wobei c den Rand von D einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

b) Berechnen Sie $\int_{\partial D} \langle v(x), n \rangle ds$ sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 12.4 Die Kurve γ sei in Polarkoordinaten durch $r = \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ gegeben. Berechnen Sie $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle$ für das Vektorfeld $v(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))^T$.

Aufgabe 12.5 a) Die Kurve γ sei durch die Parametrisierung $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\gamma} f(x) ds$ für $f(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle$ für das Vektorfeld v und die durch die Parametrisierung r gegebene Kurve γ mit $v(x, y, z) = (y, -z, x)^T$, $r(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)^T$, $0 \leq t \leq \ln 2$.

Aufgabe 12.6 a) Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x + y^\alpha) \\ 4xy + 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welchen Wert von α ist v ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie für den Fall, dass v Gradientenfeld ist, den Wert von $\int_{c_n} \langle v(x), dx \rangle$, wobei $c_n(t) = (e^{\sin(n\pi t)}, 1 - t^n)^T$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ ist.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ durch

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z^2 \cos(yz^2) \\ 2yz \cos(yz^2) + \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass w ein Gradientenfeld ist, bestimmen Sie ein Potential sowie den Wert von $\int_{\gamma} \langle w(x), dx \rangle$, wobei γ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve ist.

Aufgabe 12.7 a) Es sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle$, wobei γ den Rand von G einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

b) Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial D} \langle w(x), n \rangle ds$ sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Hörsaalübung am 11.7.06: Aufgaben 12.1, 12.2, 12.3, 12.4,

Tutorien in der Woche 10.–14.7.06: Aufgaben 12.5, 12.6, 12.7.

Übungsklausuren Die 2. Übungsklausur zu HM II findet am Samstag, den 15.07.2006 von 9.00 bis 11.00 statt. **Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.**

Physiker und Chemiker mit Nachname von **A bis K** im HMU, von **L bis Z** im HMO,
Elektrotechniker und Geodäten im Gerthsen.