

Übungen

Aufgabe 13.1 Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2uv \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Weiter sei $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Aufgabe 13.2 a) Es sei $S := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_S \langle v(X), n \rangle d\sigma$, wobei n aus dem von S berandeten Zylinder herauszeige.

b) Bestätigen Sie das Ergebnis aus a) mittels des Satzes von Gauß unter Verwendung elementargeometrischer Überlegungen.

Aufgabe 13.3 a) Es sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial K} \langle v(x), n \rangle d\sigma$ von v durch die Oberfläche von K sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

b) Es sei $\tilde{K} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z + 4, -4 \leq z \leq 0\}$. Das Vektorfeld $\tilde{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\tilde{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ x - z \end{pmatrix}.$$

Welchen Wert hat $\int_{\partial \tilde{K}} \langle \tilde{v}(x), n \rangle d\sigma$?

Aufgabe 13.4 Gegeben sei der Kegelmantel

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \wedge x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$$

sowie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $v(x) = (x_1 - x_3, x_1^2 + x_2x_3, -3 + x_2^2)^T$.

- Berechnen Sie die Oberfläche von M unter Verwendung kartesischer oder Polarkoordinaten.
- Berechnen Sie $\int_M f(x) \, do$ für $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2)^{-1/2}$.
- Das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ ist nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \int_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \, do.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0, 0, 1)$, falls $\mathcal{F} = M$ ist.

- Berechnen Sie den Fluss $\int_B \langle v(x), n \rangle \, do$, wobei $B := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \wedge x_3 = 1\}$ sei und n positive x_3 -Komponente habe.
- Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} v(x) \, dx$, wobei $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \leq 1\}$ ist.
- Bestimmen Sie den Fluss $\int_M \langle v(x), n \rangle \, do$, wobei n aus K herauszeige.

Aufgabe 13.5 Gegeben sei das Vektorfeld $f(x, y, z) = (yz - 1, 0, z - 1)^T$ sowie die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1 \wedge 1 \leq z\}.$$

- Bestimmen Sie Parametrisierungen der beiden glatten Teilflächen F_1 und F_2 , die H beranden.
- Berechnen Sie $\int_H \operatorname{div} f \, d(x, y, z)$ sowie den Fluss durch F_1 und F_2 und bestätigen Sie damit den Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13.6 Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches durch

$$x + y + z = 1 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 \leq 1$$

definiert ist.

Hörsaalübung am 18.7.06: Aufgaben 13.1, 13.2, 13.3,

Tutorien in der Woche 17.–21.7.06: Aufgaben 13.4, 13.5, 13.6.