Blatt 13 (Hörsaalübung)

Aufgabe 13.1

$\mathcal{F}_Z$ sei der Teil von $\mathcal{F}$ innerhalb von Z:

$r(u,v) \in Z \iff (u+v)^2+(u-v)^2 \le 4 \iff u^2+v^2 \le 2$

Nach Def. gilt: $I(\mathcal{F}_Z) = \int\limits_{u^2+v^2\le 2} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial u} r \times \frac{\partial}{\partial v} r\right)(u,v) \right\| d(u,v)$

mit $\left(\frac{\partial}{\partial u} r \times \frac{\partial}{\partial v} r\right)(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ v-u \\ -1 \end{pmatrix}$

$\to I(\mathcal{F}_Z) = \int\limits_{u^2+v^2\le 2} \sqrt{8(u^2+v^2)+4}\, d(u,v)$

Polarkoordinaten r, φ $\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 2r\sqrt{2r^2+1}\, d\varphi\, dr = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$

Aufgabe 13.2

a) Parametrisierung von S:

$$\mathbf{p}: D \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(\varphi, x_3) = (\cos\varphi, \sin\varphi, x_3)$$

mit $D = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi \wedge 0 \le x_3 \le 1 \right\}$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor zeigt aus dem von S berandeten Zylinder heraus.

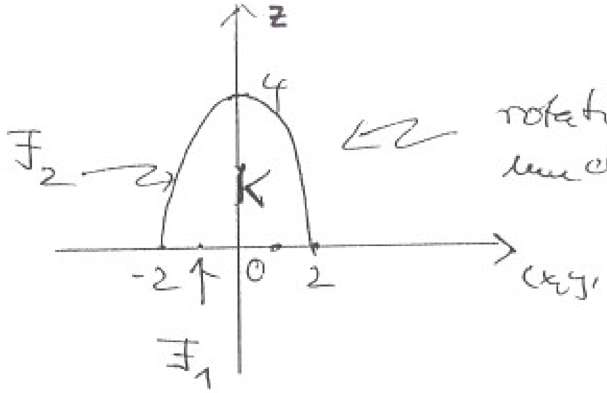
$$\int\limits_S \langle v(X), n \rangle\, do = \int_0^{2\pi}\int_0^1 < \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} > dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\, dr\, d\varphi = 2\pi$$

b) Da Normalenvektor auf Deckel D und Boden B senkrecht auf f gilt:
$\int\limits_B \langle v(X), n \rangle\, do = 0$ und $\int\limits_D \langle v(X), n \rangle = 0$.
Mit Zylinderkoordinaten, div $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2$ ergibt sich durch Integration über den Vollzylinder $\Omega := \{ X \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x_3 \le 1,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1 \}$

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 2r\, dx_3\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\, dr\, d\varphi = 2\pi$$

Aufgabe 13.3

a)



rotationssymmetrisch um die z-Achse

$$\partial K = F_1 \cup F_2$$

$$F_1: \quad r_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\int_{F_1} \langle v(x), n\rangle do} = \int_{x^2+y^2<4} (-x)\, d(x,y) \overset{\text{etwa mit Polarkoordinaten}}{=} \underline{0}$$

$$F_2: \quad r_2(\rho,t) = \begin{pmatrix} \rho\cos t \\ \rho \sin t \\ 4-\rho^2 \end{pmatrix}, \quad 0<\rho<2, \ 0<t<2\pi$$

$$,n\rangle do = \left(\frac{\partial}{\partial\rho} r_2(\rho,t) \times \frac{\partial}{\partial t} r_2(\rho,t)\right) d(\rho,t) = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos t \\ 2\rho^2 \sin t \\ \rho \end{pmatrix} d(\rho,t)$$

$$\rightarrow \quad \underline{\int_{F_2} \langle v(x), n\rangle do} = \int_{\rho=0}^{2} \int_{t=0}^{2\pi} \left\langle v(r_2(\rho,t)), \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos t \\ 2\rho^2 \sin t \\ \rho \end{pmatrix} \right\rangle dt\, d\rho = \underline{24\pi}$$

Insgesamt: $\underline{\int_{\partial K} \langle v(x), n\rangle do = 24\pi}$

Mit dem <u>Gaußschen Integralsatz</u>

$$\int_{\partial K} \langle v(x), n\rangle do = \int_K (\operatorname{div} v)(x,y,z)\, d(x,y,z) = 3 \int_K d(x,y,z)$$

$$= 3 \int_{x^2+y^2<4} \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} dz\, d(x,y) = \underline{24\pi} \quad (\text{wie gehabt})$$

(Zur Berechnung des (x,y)-Integrals verwende man Polarkoordinaten).

13.3 b)

$\tilde{K}$ entsteht aus K durch Spiegelung an der Ebene $z = 0$, und es gilt $\tilde{v}(x,y,z) = v(x,y,-z)$.

Daher ist $\int\limits_{\partial\tilde{K}} \langle \tilde{v}(x), n \rangle \, do = \int\limits_{\partial K} \langle v(x), n \rangle \, do$

$$\overset{a)}{=} 24\pi .$$

Blatt 13 (Tutorien)

Aufgabe 13.4

a)

Parametrisierung und Berechnung in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{p}_1 : K_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{p}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

wobei $K_1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$, d. h., es gilt $M = \mathbf{p}_1(K_1)$.

$$\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial y} \right\| = \sqrt{2}$$

$$\int\limits_M do = \int\limits_{K_1} \left\| \tfrac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} \times \tfrac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial y} \right\| d(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2}\, dy\, dx = 2\sqrt{2} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=} 2\sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \pi\sqrt{2}.$$

Parametrisierung und Berechnung in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{p}_2 : \underbrace{[0,1] \times [0,2\pi]}_{=K_2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{p}_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

$$\tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial r} \times \tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\| \tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial r} \times \tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{2}r$$

$$\int\limits_M do = \int\limits_{K_2} \left\| \tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial r} \times \tfrac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \varphi} \right\| d(r,\varphi) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2}r\, d\varphi\, dr = \pi\sqrt{2}.$$

b)

Mittels Parametrisierung und Berechnung in Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \int\limits_M f(x)\, do &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + (r-1)^2)^{-1/2} \sqrt{2}r\, d\varphi dr \\ &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2r^2-2r+1}} \sqrt{2}r\, d\varphi dr = 2\sqrt{2}\pi \int\limits_0^1 \tfrac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\, dr \\ &= \pi \ln(2\sqrt{4r^2-4r+2} + 4r - 2)\Big|_0^1 \\ &= \pi \ln\left(\tfrac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}\right) = \pi \ln\left(\tfrac{(2\sqrt{2}+2)^2}{(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)}\right) = \pi \ln\left(\tfrac{8\sqrt{2}+12}{4}\right) = \pi \ln(2\sqrt{2}+3). \end{aligned}$$

c)

Aufgrund des Ergebnisses aus Teilaufgabe b) ist $U(\vec{a}) = \rho\pi \ln(2\sqrt{2}+3)$.

d)

Da B parallel zur Ebene $x_3 = 0$ ist, ist $\langle v(x), n \rangle$ auf B die x_3-Komponente von v. Wir parametrisieren B in Polarkoordinaten. Die x_3–Komponente von v eingeschränkt auf B ist in Polarkoordinaten gleich $-3 + r^2\sin^2\varphi$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_B \langle v(x), n\rangle\, do &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(-3+r^2\sin^2\varphi)r\,d\varphi dr = \int_0^1\left(-6\pi r + r^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\right) dr\\ &= \int_0^1 -6\pi r + r^3\pi\, dr = (-3\pi r^2 + \tfrac{\pi}{4}r^4)\big|_0^1 = -\tfrac{11}{4}\pi.\end{aligned}$$

e)
Wir verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Dann ist $\operatorname{div} v = 1 + z$ und

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{div} v(x)\, dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 (1+z)r\, dz dr d\varphi = 2\pi\int_0^1 (z + \tfrac{z^2}{2})\big|_r^1 r\, dr\\ &= 2\pi\int_0^1 \tfrac{3r}{2} - r^2 - \tfrac{r^3}{2}\, dr = 2\pi(\tfrac{3r^2}{4} - \tfrac{r^3}{3} - \tfrac{r^4}{8})\big|_0^1 = \tfrac{7}{12}\pi.\end{aligned}$$

f)
Nach dem Satz von Gauß ist
$\int_M \langle v(x), n\rangle\, do = \int_K \operatorname{div} v(x)\, dx - \int_B \langle v(x), n\rangle\, do = \tfrac{7}{12}\pi + \tfrac{11}{4}\pi = \tfrac{10}{3}\pi.$

Aufgabe 13.5

a) Parametrisierung der Bodenfläche F_1:

$$\mathbf{p}_1 : [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \mathbf{p}_1(r,\varphi) = (r\cos\varphi + 2, r\sin\varphi, 1)^T,$$

Äußere Normalenrichtung zu F_1 :

$$\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial\varphi}\times\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}.$$

Parametrisierung der Halbkugeloberfläche F_2 :

$$\mathbf{p}_2 : [0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \mathbf{p}_2(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta + 2, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta + 1)^T,$$

Äußere Normalenrichtung zu F_2 :

$$\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial\varphi}\times\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0\\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos^2\theta\\ \sin\varphi\cos^2\theta\\ \sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}.$$

b)
i) Mit Kugelkoordinaten, die um den Vektor $(2,0,1)^T$ verschoben sind, und mit $\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) = 1$ ergibt sich:

$$\int_H \operatorname{div}\mathbf{f}\ d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, d\varphi d\theta dr = \int_0^1 r^2\, dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \tfrac{r^3}{3}\big|_0^1 \sin\theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi$$
$$= \tfrac{2\pi}{3}$$

ii)

$$\int_{F_1}\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), n\rangle\, do = \int_0^1\int_0^{2\pi}\langle\begin{pmatrix} r\sin\varphi - 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}\rangle\, d\varphi\, dr = 0$$

$$\int_{F_2} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), n\rangle \, do = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta - 1 \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\theta \\ \sin\varphi\cos^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \rangle \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin\varphi\cos\varphi\cos^3\theta\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi\cos^3\theta - \cos\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\theta) \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^3\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^3\theta - \sin\varphi\cos^2\theta + \varphi\sin^2\theta\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\pi\sin^2\theta\cos\theta) \, d\theta = 2\pi\frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

Das Integral aus i) hat nach Gauß den gleichen Wert wie die Summe der Werte der Integrale aus ii).

Aufgabe 13.6

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}$, und sei die Ebene $x + y + z = 1$ in kartesischen Koordinaten parametrisiert durch $p(x,y) = (x, y, 1-x-y)^T$. Dann ist $\|\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y}\| = \sqrt{3}$ und der Inhalt des in dieser Aufgabe definierten Flächenstücks ist gleich

$\int\limits_D \sqrt{3}\, d(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}} \sqrt{3}\, dy dx = \sqrt{6} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \sqrt{6}(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{\pi}{2}\sqrt{6}.$