Blatt 14 (Tutorien)

Aufgabe 14.1

a)
Die Fläche kann parametrisiert werden durch:

$$\mathbf{p}: K \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \;\; \mathbf{p}(u,v) = (u, v, uv)^T \quad \text{mit} \;\; K := \{(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leqslant 4\}.$$

Normalenrichtung zu F:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix},$$

(Orientierung ok)

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(x,y,z) = (-1-(-1), 1-(-1), 1-(-1))^T = (2,2,2)^T,$$

$$\Longrightarrow \int_F \langle \operatorname{rot} \mathbf{u}, n \rangle \, do = \int_K \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, d(u,v) = 2 \int_K (1-u-v) \, d(u,v)$$

$$= 2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r \, d\varphi \, dr = 2 \int_0^2 (r\varphi - r^2 \sin\varphi + r^2 \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} dr = 2 \int_0^2 2\pi r \, dr = 8\pi$$

b)
Die Randkurve ∂F kann durch $\mathbf{c}$ parametrisiert werden:

$$\mathbf{c}: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \;\; \mathbf{c}(\varphi) = 2(\cos\varphi, \sin\varphi, 2\cos\varphi\sin\varphi)^T,$$
$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{c}}(\varphi) = 2(-\sin\varphi, \cos\varphi, 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))^T$$

(Orientierung ok)

$$\oint_{\partial F} \langle \mathbf{u}(x), dx \rangle = 4 \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi \\ \cos\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{pmatrix} \rangle \, d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^3\varphi - 2\cos^3\varphi) \, d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 8\pi$$

Aufgabe 14.2

- direkte Berechnung von $\int_{\partial M} \langle v, dx \rangle$:

Parametrisierung von ∂M durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos^2\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Es ist

$$\dot\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{(Orientierung ok)},$$

$$v(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle v, dx \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle v, \dot\gamma \rangle \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2\sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi \\ &= \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

- Berechnung von $\int_{\partial M} \langle v, dx \rangle$ mit Stokes:

Parametrisierung von M durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r\cos^2\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}$$

Es ist

$$(\phi_r \times \phi_\varphi)(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\,(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi) \\ r\sin\varphi\,\cos^2\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

(Orientierung ok),

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\partial M} \langle v, dx \rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M \langle \operatorname{rot} v, n \rangle \, d\sigma$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \langle \operatorname{rot} v, \phi_r \times \phi_\varphi \rangle \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 2r \, dr \, d\varphi$$

$$= 2\pi \, r^2 \Big|_0^1$$

$$= \underline{\underline{2\pi}}$$