UNIVERSITÄT KARLSRUHE 27.04.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (T)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $I = [a, b]$. Weiter seien über I integrierbare Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ sowie $f_n : I \to \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben.
Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen die Funktion f, so konvergiert sie auch im quadratischen Mittel gegen f.

Aufgabe 2 (T)
Es seien $a, p \in \mathbb{R}$, und $p > 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei p-periodisch und über jedem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx \quad \text{sowie} \quad \int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,dx.$$

Aufgabe 3 (T)
Mit $N \in \mathbb{N}$ sei $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, ..., N$, $b_k \in \mathbb{C}$ für $k = 1, ..., N$ sowie $c_k \in \mathbb{C}$ für $k = -N, ..., N$. Des weiteren sei das trigonometrische Polynom

$$T_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben. Beweisen Sie:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $T_N = 0$,

(ii) $a_0 = 0$ und $a_k = b_k = 0$ für $k = 1, ..., N$,

(iii) $c_k = 0$ für $k = -N, ..., N$.

b) Die Funktionen

$$\varphi_k(x) = \cos(kx) \quad (x \in \mathbb{R}, k = 0, ..., N) \quad \text{und} \quad \psi_m(x) = \sin(mx) \quad (x \in \mathbb{R}, m = 1, ..., N)$$

sind über $\mathbb{C}$ linear unabhängig.

c) T_N ist genau dann eine gerade Funktion, wenn $b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, N$ gilt.

d) T_N ist genau dann eine ungerade Funktion, wenn $a_k = 0$ für $k = 0, \ldots, N$ gilt.

e) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $T_N(x) \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R})$,
(ii) $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, \ldots, N$,
(iii) $c_k = \overline{c_{-k}}$ für $k = 0, \ldots, N$.

Aufgabe 4 (Ü)
Es sei V der Vektorraum der 2π-periodischen beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen 1.Art besitzen.
Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ erklärt durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad (f, g \in V),$$

sowie $\|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}$ durch $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f \in V)$.
Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle f, g \rangle| \le \|f\|_2 \, \|g\|_2 \quad (f, g \in V).$$

Aufgabe 5 (T)
Es sei $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2\pi}$ für $0 \le x < 2\pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Fourierreihe.

b) Zeigen Sie: Mit der Funktion $H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \ge 0, \\ 0 & , \quad x < 0, \end{cases}$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) (H(x - 2k\pi) - H(x - 2(k+1)\pi)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 6 (Ü)
Es sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Fourierreihe.

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = f.$$

Aufgabe 7 (Ü)
Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |x|^3$ für $x \in [-2, 2)$ und $f(x + 4) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.