UNIVERSITÄT KARLSRUHE 04.05.2007
Institut für Analysis

Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (Ü)

Beweisen Sie mit Hilfe der Funktion D_n aus der Vorlesung, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$ gilt.

Aufgabe 2 (Ü)
In $\mathbb{C}^4$ seien die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Vergleichen Sie die Vektorräume

$$Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}), \qquad Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}), \qquad Lin(\vec{v_1}, \vec{v_3}), \qquad Lin(\vec{v_2}, \vec{v_3}).$$

Aufgabe 3 (T)
In $\mathbb{C}^4$ seien die vier Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_4} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\langle \vec{b_i}, \vec{b_k} \rangle = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots 4)$,

b) $Lin(\vec{a_1}) = Lin(\vec{b_1}), \quad Lin(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = Lin(\vec{b_1}, \vec{b_2}), \quad Lin(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) = Lin(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$,
$Lin(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}) = Lin(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4})$.

Aufgabe 4 (Ü)
Es seien U, V und W komplexe Vektorräume, $f \in L(U, V)$ sowie $g \in L(V, W)$. Zeigen Sie: $g \circ f \in L(U, W)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 5 (Ü)
Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume, und $f : V \to W$ sei ein Isomorphismus. Weisen Sie nach, dass V und W dieselbe Dimension haben, d.h. $\dim V = \dim W$ ist.

Aufgabe 6 (T)
Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n, v \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gegeben. Zeigen Sie:

a) $\langle \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u_k, v\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \langle u_k, v\rangle$.

b) $\langle \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k u_k, \sum\limits_{l=1}^{n} \beta_l v_l\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_l} \langle u_k, v_l\rangle$.

Aufgabe 7 (T)
Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$, $u, w \in V$ und die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ mögen eine Orthonormalbasis (d.h. eine Basis und ein Orthonormalsystem) von V bilden. Zeigen Sie:

a) $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle u, v_k\rangle \, v_k$.

b) $\langle u, w\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle u, v_k\rangle \, \overline{\langle w, v_k\rangle}$

c) $\langle u, u\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} |\langle u, v_k\rangle|^2$

Aufgabe 8 (Ü)
Bestimmen Sie jeweils den Kern und das Bild der in der Vorlesung definierten linearen Abbildungen

a) $\mathrm{proj}_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{a})\, \vec{a} \quad (x \in \mathbb{R}^3)$,

b) $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ Df = f' \quad (f \in C^1(\mathbb{R}))$,

c) $I : C^0(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R}),\ (If)(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt \quad (x \in \mathbb{R}, f \in C^0(\mathbb{R}))$.

Aufgabe 9 (T)
Es sei $S : l^2 \to l^2$ definiert durch $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ für jedes $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$. Zeigen Sie: $S \in L(l^2, l^2)$, und bestimmen Sie Bild und Kern von S.