Höhere Mathematik II

Lösungen zum 3. Übungsblatt

(1) Wie in HM I gezeigt wurde, existiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ im uneigentlichen Sinne, und es gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx .$$

Nun ist

$$I(n) := \int\limits_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \underset{x=(n+\frac{1}{2})t}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\cdot t\right)}{t}\, dt$$

$$= \pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}}_{=f(t)} \; \underbrace{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}}_{=D_n(t)}\, dt .$$

Setzt man die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
$f(t) = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$, 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort,
und bezeichnet die Fortsetzung mit $\tilde{f}$, so ist $\tilde{f} \in V$
(Def. von V siehe Vorlesung bzw. 2. Übungsblatt), und
$\tilde{f}$ ist bekanntlich in $t = 0$ stetig differenzierbar.

Gemäß Vorlesung gilt somit:

$$I(n) = \pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\, D_n(t)\, dt$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\, \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(0^-) + \tilde{f}(0^+)\right] = \pi\, \tilde{f}(0)$$

$$= \pi\, f(0) = \pi .$$

Daher erhalten wir: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi .$

(2) Es ist

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \{ \vec{x} = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 : r, s, t \in \mathbb{C} \}.$$

Untersuche die Vektoren auf lineare Abhängigkeit:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$

$(r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0)$.

Im vorliegenden Fall:

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

Aus der Bedingung für die 2. Komponente folgt: $-2r - 2t = 0$,

also $s = -t$. $(*)$

Eingesetzt in die 1. Komponente: $r + 2s + 5t = 0$,

also $s = -2r$. $(**)$

Eingesetzt in die 3. Komponente: $3r + 5s + 13t = 0$,

liefert mit $(*)$ und $(**)$

$$3r + 10r - 13r = 0 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{C}.$$

D.h. $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 0$, und daher sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

linear abhängig.

Wir erhalten $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, d.h. $\vec{v}_3 \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$,

und damit,

$$\mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathrm{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)$$

$$= \{ x = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \}$$

$$= \{ x = (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{v}_1 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{v}_2 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \}$$

$$= \{ x = \mu_1 \vec{v_1} + \mu_2 \vec{v_2} : \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \} = \mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2}).$$

Daher ist $\mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Genauso zeigt man: $\mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_3}) = \mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ und

$\mathrm{Lin}(\vec{v_2}, \vec{v_3}) = \mathrm{Lin}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,

und somit sind die vier Vektorräume identisch.

(3) Um der Eigenschaft b) zu genügen, muss gelten

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 \ , \quad \vec{b}_2 = \mu_1 \underbrace{\vec{b}_1}_{=\lambda_1 \vec{a}_1} + \mu_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{b}_3 = \xi_1 \underbrace{\vec{b}_1}_{=\text{s.o.}} + \xi_2 \underbrace{\vec{b}_2}_{\text{s.o.}} + \xi_3 \vec{a}_3$$

$$\vec{b}_4 = \eta_1 \underbrace{\vec{b}_1}_{\text{s.o.}} + \eta_2 \underbrace{\vec{b}_2}_{\text{s.o.}} + \eta_3 \underbrace{\vec{b}_3}_{\text{s.o.}} + \eta_4 \vec{a}_4 \ .$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \dots, \eta_4$ müssen nun so gewählt werden, dass auch a) erfüllt ist.

(Erinnerung: In $\mathbb{C}^4$ ist das Standardskalarprodukt wie folgt definiert: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i \overline{y_i} \quad (x, y \in \mathbb{C}^4)$).

- zu $\vec{b}_1$: $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$. Dann ist

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle = \langle \lambda_1 \vec{a}_1, \lambda_1 \vec{a}_1 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_1} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle$$

$$= |\lambda_1|^2 \, \|\vec{a}_1\|^2 \overset{!}{=} \delta_{1,1} = 1 \ .$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = |\lambda_1|^2 \|\vec{a}_1\|^2 = |\lambda_1|^2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= |\lambda_1|^2 \cdot 5 \ , \quad \text{also} \quad |\lambda_1| = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

Wähle $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

- zu $\vec{b}_2$: $\vec{b}_2 = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2$.

Es soll gelten: $0 = \delta_{1,2} = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$

$$= \langle \vec{b}_1, \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 \rangle = \overline{\mu_1} \underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle}_{=\delta_{1,1} = 1} + \overline{\mu_2} \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle$$

und damit $\mu_1 = -\mu_2 \overline{\langle \vec{b_1}, \vec{a_2} \rangle} = -\mu_2 \langle \vec{a_2}, \vec{b_1} \rangle$

Eingesetzt ergibt dies

$$\vec{b_2} = -\mu_2 \langle \vec{a_2}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} + \mu_2 \vec{a_2}$$

$$= \mu_2 \left(\vec{a_2} - \langle \vec{a_2}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} \right)$$

$$= \mu_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2i/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \mu_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (2i) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2i/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \mu_2 \begin{pmatrix} \frac{2i}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\langle \vec{b_2}, \vec{b_2} \rangle = |\mu_2|^2 \left\langle \begin{pmatrix} 2i/5 \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i/5 \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= |\mu_2|^2 \left(\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + 4 + 1 \right) = |\mu_2|^2 \frac{130}{25} \overset{!}{=} \delta_{2,2} = 1$$

folgt $|\mu_2|^2 = \frac{25}{130}$. Wir wählen $\mu_2 = \frac{5}{\sqrt{130}}$,

damit ist $\vec{b_2} = \frac{5}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} \frac{2i}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$

• zu $\vec{b_3}$: $0 = \delta_{1,3} \stackrel{!}{=} \langle \vec{b_1}, \vec{b_3} \rangle$

$$= \overline{\gamma_1} \underbrace{\langle \vec{b_1}, \vec{b_1} \rangle}_{=1} + \overline{\gamma_2} \underbrace{\langle \vec{b_1}, \vec{b_2} \rangle}_{=0} + \overline{\gamma_3} \langle \vec{b_1}, \vec{a_3} \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma_1 = -\gamma_3 \langle \vec{a_3}, \vec{b_1} \rangle$$

Weiter soll gelten $0 = \delta_{2,3} \stackrel{!}{=} \langle \vec{b_2}, \vec{b_3} \rangle$

$$= \overline{\gamma_1} \underbrace{\langle \vec{b_2}, \vec{b_1} \rangle}_{=0} + \overline{\gamma_2} \underbrace{\langle \vec{b_2}, \vec{b_2} \rangle}_{=1} + \overline{\gamma_3} \langle \vec{b_2}, \vec{a_3} \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma_2 = -\gamma_3 \langle \vec{a_3}, \vec{b_2} \rangle$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\vec{b_3} = -\gamma_3 \langle \vec{a_3}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} - \gamma_3 \langle \vec{a_3}, \vec{b_2} \rangle \vec{b_2} + \gamma_3 \vec{a_3}$$

$$= \gamma_3 \left(\vec{a_3} - \langle \vec{a_3}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} - \langle \vec{a_3}, \vec{b_2} \rangle \vec{b_2} \right.$$

$$= \gamma_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \gamma_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{15}{130}}_{=\frac{3}{26}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \gamma_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{13} i \\ -\frac{3}{26} \\ -\frac{4}{26} \\ -\frac{11}{26} \end{pmatrix}$$

Wegen $\langle \vec{b_3}, \vec{b_3} \rangle = |\gamma_3|^2 \left(\frac{36}{676} + \frac{9}{676} + \frac{16}{676} + \frac{121}{676} \right)$

$$= |\gamma_3|^2 \frac{182}{676} = |\gamma_3|^2 \frac{7}{26} \overset{!}{=} 1$$

folgt $|\gamma_3|^2 = \frac{26}{7}$. Wir wählen $\gamma_3 = \sqrt{\frac{26}{7}}$.

Damit ist

$$\vec{b_3} = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

- zu $\vec{b_4}$: $0 = \delta_{1,4} \overset{!}{=} \langle \vec{b_1}, \vec{b_4} \rangle = \overline{\eta_1} + \overline{\eta_4} \langle \vec{b_1}, \vec{a_4} \rangle$,

also $\eta_1 = -\eta_4 \langle \vec{a_4}, \vec{b_1} \rangle$,

$0 = \delta_{2,4} \overset{!}{=} \langle \vec{b_2}, \vec{b_4} \rangle = \overline{\eta_2} + \overline{\eta_4} \langle \vec{b_2}, \vec{a_4} \rangle$,

also $\eta_2 = -\eta_4 \langle \vec{a_4}, \vec{b_2} \rangle$,

$0 = \delta_{3,4} \overset{!}{=} \langle \vec{b_3}, \vec{b_4} \rangle = \overline{\eta_3} + \overline{\eta_4} \langle \vec{b_3}, \vec{a_4} \rangle$,

also $\eta_3 = -\eta_4 \langle \vec{a_4}, \vec{b_3} \rangle$

Eingesetzt ergibt dies

$$\vec{b_4} = \eta_4 \left(\vec{a_4} - \langle \vec{a_4}, \vec{b_1} \rangle \vec{b_1} - \langle \vec{a_4}, \vec{b_2} \rangle \vec{b_2} - \langle \vec{a_4}, \vec{b_3} \rangle \vec{b_3} \right)$$

$$= \eta_4 \Bigg[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$= \eta_4 \left[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3i}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{14}{130} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{16}{182} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \eta_4 \left[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{546i}{910} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{98}{910} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{80}{910} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \eta_4 \cdot \frac{1}{910} \begin{pmatrix} 780i \\ -390 \\ 390 \\ 390 \end{pmatrix} = \eta_4 \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 78i \\ -39 \\ 39 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$= \eta_4 \frac{39}{91} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle \vec{b_4}, \vec{b_4} \rangle = |\eta_4|^2 \left(\frac{39}{91}\right)^2 \cdot 7 \overset{!}{=} 1$

folgt $|\eta_4|^2 = \frac{1}{7} \left(\frac{91}{39}\right)^2$

Wir wählen $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{91}{39}$, also $\vec{b_4} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit besitzen die so konstruierten Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}$ die Eigenschaften a) und b).

Bemerkungen: Wir haben in dieser Aufgabe die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$, die eine Basis des $\mathbb{C}^4$ darstellen, orthogonalisiert und so eine Orthonormalbasis $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4})$ des $\mathbb{C}^4$ gewonnen, die auf den Vektoren $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_4}$ „basiert".

Dieses Verfahren nennt man Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren:

Dabei setzt man allgemein

$$\vec{b}_i = \frac{\hat{\vec{b}}_i}{\|\hat{\vec{b}}_i\|} \quad \text{mit}$$

$$\hat{\vec{b}}_i = \vec{a}_i - \langle \vec{a}_i , \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \ldots - \langle \vec{a}_i , \vec{b}_{i-1} \rangle \vec{b}_{i-1} .$$

für $i = 1, \ldots, n$ ....

(4) Es seien U, V, W komplexe Vektorräume, $f \in L(U, V)$, $g \in L(V, W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in U$.

Definitionsgemäß geht $g \circ f : U \to W$.

Zu zeigen ist also nur noch die folgende Gleichheit:

$$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)$$

Beweis: Es gilt:

$$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) \underset{\text{Def.}}{=} g(f(\alpha x + \beta y))$$

$$\underset{\text{Lin.}}{=} g(\underbrace{\alpha \underbrace{f(x)}_{\in V}}_{\in V} + \underbrace{\beta \underbrace{f(y)}_{\in V}}_{\in V})$$

$$\underset{\text{Lin.}}{=} \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y))$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y).$$

Da $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in U$ beliebig waren, ist $g \circ f \in L(U, W)$.

(5) Es sei V, W endl.-dim. Vektorräume, und $f: V \to W$ ein Isomorphismus. Wir wollen $\dim V = \dim W$ zeigen.

Es sei dazu $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, d.h. $V = \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$ und $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig.

Wir definieren Vektoren $w_1, \dots, w_n \in W$ durch

$$w_k = f(v_k) \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Nun zeigen wir 1. $W = \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_n)$

2. $w_1, \dots, w_n$ sind linear unabhängig.

Ist dies gezeigt, so gilt $\dim W = \dim V$, denn $w_1, \dots, w_n$ ist dann eine Basis von W.

Zu 1.): Es sei $w \in W$. Da f als Isomorphismus insbesondere bijektiv ist, existiert ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Da $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V bilden, existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k,$$

und damit ist

$$w = f(v) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right)$$

$$\underset{f \text{ linear}}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k \in \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_n).$$

Damit ist 1. gezeigt.

Zu 2.) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0.$$

Dann ist $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$

$$\underset{\text{Lin}}{=} f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0 .$$

Da f als Isomorphismus bijektiv ist, existiert genau ein Element $v \in V$ mit $f(v) = 0$, nämlich $v = 0$.

Also gilt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, und da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Daher sind auch $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig.

⑥

a) Beweis per Induktion:

$$IA: \ m=1: \quad \langle \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \mid v \rangle = \langle \alpha_1 u_1 \mid v \rangle$$

$$\underset{\text{Lin.}}{=} \alpha_1 \langle u_1 \mid v \rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle$$

$IS: \ m \to m+1:$

$$\langle \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k u_k \mid v \rangle \underset{\text{Def.}}{=} \langle \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \right) + \alpha_{m+1} u_{m+1} \mid v \rangle$$

$$\underset{\text{Lin.}}{=} \langle \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \mid v \rangle + \langle \alpha_{m+1} u_{m+1} \mid v \rangle$$

$$\underset{\text{(IV)}}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle + \alpha_{m+1} \langle u_{m+1} \mid v \rangle$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle .$$

b) Es ist

$$\langle \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \mid \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l}_{\in V} \rangle \underset{a)}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \langle u_k \mid \sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l \rangle$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{\langle \sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l \mid u_k \rangle}$$

$$\underset{a)}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{\sum_{l=1}^{n} \beta_l \langle v_l \mid u_k \rangle}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\beta_l} \, \overline{\langle v_l \mid u_k \rangle}$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{l=1}^{n} \overline{\beta_l} \, \langle u_k \mid v_l \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_l} \, \langle u_k \mid v_l \rangle \, .$$

(7)

a) Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Basis des Vektorraums V bilden, läßt sich jedes $u \in V$ eindeutig schreiben als

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Dabei hängen die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ offensichtlich von $u \in V$ ab.

Aufgrund der Orthogonalität der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gilt für alle $l = 1, \ldots, n$:

$$\langle u, v_l \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k \,|\, v_l \rangle$$

$$\underset{\text{Afg. 4.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\langle v_k, v_l \rangle}_{= \delta_{kl}} = \alpha_l .$$

Damit folgt

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle v_k .$$

b) Mit a) gilt für $u, w \in V$:

$$u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle v_k \quad \text{sowie} \quad w = \sum_{l=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k .$$

Aus Aufgabe 4 b) folgt nun

$$\langle u, w \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle v_k \,|\, \sum_{l=1}^{n} \langle w, v_k \rangle v_k \rangle$$

$$\underset{\text{Orth.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle u, v_k \rangle \overline{\langle w, v_l \rangle} \underbrace{\langle v_k | v_l \rangle}_{= \delta_{kl}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle \overline{\langle w, v_k \rangle} .$$

c) Mit c) erhalten wir

$$\langle u, u \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u, v_k \rangle \overline{\langle u, v_k \rangle}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} | \langle u, v_k \rangle |^2 .$$

8 a) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$. Insbesondere ist dann $\vec{a} \neq \vec{0}$.

<u>Bild $\operatorname{proj}_{\vec{a}}$:</u> Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Dann ist $\operatorname{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{a})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{a} \in \operatorname{Lin}(\vec{a})$.

Ist $\vec{y} \in \operatorname{Lin}(\vec{a})$, also $\vec{y} = \lambda \vec{a}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\vec{a}}(\vec{y}) &= (\vec{y} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = ((\lambda \vec{a}) \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} \\
&= (\lambda \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{= \|\vec{a}\|^2 = 1}) \cdot \vec{a} \\
&= \lambda \vec{a} = \vec{y}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_{\vec{a}}) = \operatorname{Lin}(\vec{a})$

<u>Kern $\operatorname{proj}_{\vec{a}}$:</u> Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{0}$.

Dann ist $\vec{0} = \operatorname{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{a})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\vec{a}}_{\neq \vec{0}}$.

Daher muss $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$, d.h. $\vec{x} \perp \vec{a}$ gelten.
Gilt $\vec{x} \perp \vec{a}$, so ist offensichtlich $\operatorname{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{0}$.
Wir erhalten also

$$\operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_{\vec{a}}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \perp \vec{a}\}$$

b) Es sei $D: C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ definiert durch
$Df = f' \quad (f \in C^1(\mathbb{R}))$.

<u>Kern D:</u> Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $Df = 0$,

d.h. $Df = f' = 0$, also $f = \text{const.}$.
Ist $f = \text{const.}$, so ist offensichtlich $f \in \operatorname{Kern} D$.

Somit erhalten wir $\operatorname{Kern} D = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f = \text{const.} \}$

<u>Bild D:</u> Es sei $g \in C^0(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$ Dann ist $f \in C^1(\mathbb{R})$

und es gilt $f'(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,
d.h. $g = f' = Df$.
Und somit ist $\operatorname{Bild} D = C^0(\mathbb{R})$

c) Es sei $I : C^0(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(If)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R},\ f \in C^0(\mathbb{R}))$$

<u>Kern D:</u> Offensichtlich ist $f = 0 \in \operatorname{Kern} D$.
Es sei $g \in \operatorname{Kern} D$. Dann ist

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere folgt daraus $G'(x) = g(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$,
also $g = 0$.
Damit ist $\operatorname{Kern} D = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R}) \} = \{0\}$.

<u>Bild D:</u> Es sei $f \in C^0(\mathbb{R})$.
Wegen $(If)(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$, ist

$$\operatorname{Bild} I \subseteq \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}.$$

Ist $g \in \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$, so ist

$g' \in C^0(\mathbb{R})$ und

$$(Ig')(x) = \int_0^x g'(t)\,dt = g(x) - \underbrace{g(0)}_{=0} = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

also $Ig' = g$.

Wir erhalten $\text{Bild}\, I = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$.

(9) Es sei $S: \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \qquad (x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2).$$

Dieser Operator wird auch Linksshift genannt.

Gemäß Vorlesung ist ℓ^2 ein Vektorraum, d.h.

mit $x, y \in \ell^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ sind auch $x+y$ sowie $\alpha x \in \ell^2$.

Zur Linearität: Mit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ist

$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$, denn

$$\sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 .$$

Es seien nun $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$

und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dann ist

$$S(x+y) = S(\underbrace{x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \dots}_{\in \ell^2})$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} (\underbrace{x_2+y_2, x_3+y_3, \dots}_{\in \ell^2})$$

$$\underset{\ell^2\ \text{VR}}{=} (x_2, x_3, \dots) + (y_2, y_3, \dots)$$

$$= S(x_1, x_2, x_3, \dots) + S(y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$= S(x) + S(y).$$

Weiter ist $S(\alpha x) = S(\underbrace{\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots}_{\in \ell^2,\ \text{da}\ \ell^2\ \text{VR}})$

$$\underset{\text{Def.}}{=} (\underbrace{\alpha x_2, \alpha x_3, \dots}_{\in \ell^2})$$

$$\underset{\ell^2\ \text{VR}}{=} \alpha (x_2, x_3, \dots)$$

$$= \alpha\, S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha\, S(x).$$

Also ist der Operator $S: \ell^2 \to \ell^2$ linear.

Zum Kern: Es sei $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \operatorname{Kern} S$.

Dann gilt $S(x) = (x_2, x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$,

also $x_k = 0 \quad (k \geq 2,\ k \in \mathbb{N})$.

Wir erhalten somit

$$\operatorname{Kern} S = \{ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2 : \ x_k = 0 \ (k \in \mathbb{N},\ k \geq 2) \}.$$

Zum Bild: Es sei $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$.

Setzt man $\tilde{x} = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, so ist wegen

$$|0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2, \quad \tilde{x} \in \ell^2.$$

Es gilt $S(\tilde{x}) = S(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) = x$,

und wir erhalten

$$\operatorname{Bild}(S) = \ell^2.$$