UNIVERSITÄT KARLSRUHE 11.05.2007
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Mitschele

Höhere Mathematik II

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

4.Übungsblatt - SS 2007

Aufgabe 1 (Ü)
Es sei V ein Vektorraum, und V_1, V_2 seien Teilräume von V. Beweisen Sie:

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Teilraum von V.

b) $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Teilraum von V.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Teilraum von V.

Aufgabe 2 (Ü)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$, und $P_n(\mathbb{R})$ bezeichne den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Weiter seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Zeigen Sie:

a) Die Polynome

$$I_l(x) := \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{n} (x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{n} (x_l - x_k)} \qquad (l = 0, \ldots, n)$$

bilden eine Basis von $P_n(\mathbb{R})$.

b) Die Menge U_m der Polynome $p \in P_n(\mathbb{R})$, die $p^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, 1, ..., m$ erfüllen, bilden einen $(n-m)-$ dimensionalen Teilraum von $P_n(\mathbb{R})$. Geben Sie eine Basis von U_m an.

Aufgabe 3 (T)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n(\mathbb{R})$ wie in Aufgabe 2. Weiter sei $D : P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ für jedes $p \in P_4(\mathbb{R})$ durch $Dp = p'$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass D linear ist.

b) Bestimmen Sie die bezüglich der Standardbasen $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ sowie $\{1, t, t^2, t^3\}$ zu D gehörende Abbildungsmatrix A.

– bitte wenden –

c) Zeigen Sie: $\dim(P_4(\mathbb{R})) = \dim \operatorname{Kern}(D) + \dim \operatorname{Bild}(D)$.

d) Es sei $I : P_3(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$(Ip)(t) = \int_0^t p(x)\,dx \quad (t \in \mathbb{R},\ p \in P_3(\mathbb{R})).$$

Zeigen Sie: $D \circ I = \mathrm{Id}_{P_3(\mathbb{R})}$ und $I \circ D \neq \mathrm{Id}_{P_4(\mathbb{R})}$.

Aufgabe 4 (T)
Es sei $n \in \mathbb{N}$, und $x \in \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch $x = (1, 2, ..., n)^\top$. Bestimmen Sie $x^\top x$ sowie $xx^\top$.

Aufgabe 5 (T)
Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gelte $|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = 1$, und die Matrix A sei definiert durch $A := (\alpha_k \overline{\alpha_l})_{k,l=1,\ldots,n}$. Berechnen Sie A^m für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 (T)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A + B)C, \quad A^*C, \quad C^\top B.$$

Aufgabe 7 (Ü)
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ soll durch Zeilenoperationen umgeformt werden. Bestimmen Sie für jede mögliche Zeilenoperation eine Matrix B derart, dass BA die Matrix ist, die sich nach Ausführen der Zeilenoperation ergibt.

HINWEIS

Am Freitag, den 18. Mai 2007, findet anstatt der Übung eine Vorlesung zur Höheren Mathematik II statt.